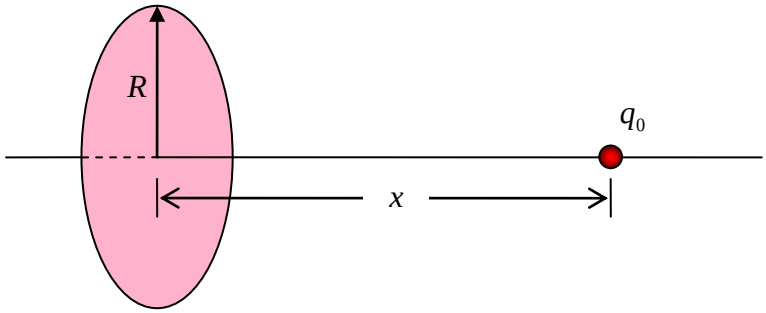
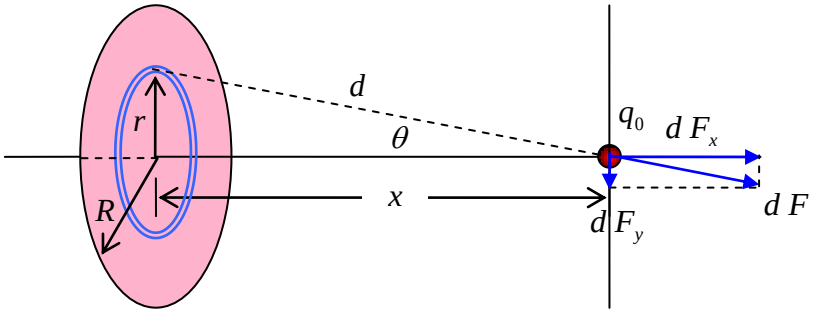
Ejemplo 25-5 del Resnick - Halliday. Quinta Edición. Página 578.

Disco con carga uniforme. En la figura se muestra un disco circular de radio R que porta una carga positiva q distribuida uniformemente en su superficie, de modo que la densidad de carga superficial es $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$. Una carga puntual positiva q_0 se halla en el eje del disco (el eje positivo x), a una distancia x del centro del disco. Calcular la fuerza que ejerce el disco sobre la carga puntual.



Solución.

Se considera un elemento diferencial de carga ($d\,q$) sobre la barra. En este caso es un anillo diferencial. La influencia que ejerce dicho elemento sobre la carga q_0 colocada en el punto P es de repulsión, con un diferencial de fuerza eléctrica $d\,F$ (orientado con un ángulo θ respecto a la horizontal). $d\,F$ se descompone en sus componentes rectangulares $d\,F_x$ y $d\,F_y$.



Componentes rectangulares de la fuerza eléctrica:

Componente horizontal.

$$d\,F_x = d\,F\cos\theta$$

$$\int d\,F_x = \int d\,F\cos\theta$$

$$F_x = \int d\,F \cos\theta$$

Componente vertical.

$$d\,F_y = d\,F \operatorname{sen}\theta$$

$$\int d\,F_y = \int d\,F \operatorname{sen}\theta$$

$$F_y = \int d\,F \operatorname{sen}\theta$$

Por simetría $F_y = 0$

El diferencial de la fuerza eléctrica viene dado por:

$$d\,F = k\frac{q_0 d\,q}{d^2}$$

Componente horizontal de la fuerza eléctrica.

$$F_x = \int_0^Q k\frac{q_0 d\,q}{d^2}\cos\theta$$

$$F_x = k\,q_0 \int_0^Q \frac{d\,q}{d^2}\cos\theta$$

Para determinar el diferencial de carga, recurrimos a la definición de densidad superficial de carga:

$$\sigma = \frac{q}{A}$$

Al despejar la carga:

$q = \sigma A$

Al diferenciar con respecto a la superficie A:

$d\,q = \sigma\,d\,A$

Por tratarse de un disco, su superficie es:

$A = \pi\,r^2$

Al diferenciar con respecto al radio r:

$d\,A = 2\,\pi\,r\,d\,r$

Finalmente, el diferencial de carga queda expresado como:

$d\,q = 2\,\pi\,\sigma\,r\,d\,r$

Distancia entre el elemento diferencial ($d\,q$) y la carga puntual q_0.

$$d^2 = x^2 + r^2$$

$$d = \sqrt{x^2 + r^2}$$

Ángulo que forma el diferencial de la fuerza eléctrica ($d\,F$) con la horizontal.

$$\cos\theta = \frac{x}{d}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

Al sustituir $d\,q$, r y $\cos\theta$ en la expresión de la fuerza eléctrica (1):

$$F_x = k\,q_0 \int_0^R \frac{2\pi\sigma\, r\, d\,r}{x^2 + r^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

$$F_x = 2\pi k\,q_0 \sigma\, x \int_0^R \frac{r\, d\,r}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

La integración conduce a:

$$F_x = 2\pi k\,q_0 \sigma\, x \left(-\frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} \Bigg|_0^R \right)$$

$$F_x = 2\pi k\,q_0 \sigma\, x \left(-\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} + \frac{1}{x} \right)$$

$$F_x = 2\pi k\,q_0 \sigma\, x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

$$F_x = 2\pi k\,q_0 \sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

$$F = 2\pi k\,q_0 \sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \mathbf{i}$$

Una forma opcional de determinar la fuerza eléctrica dada por la ecuación

$$F_x = k\,q_0 \int_0^Q \frac{d\,q}{d^2}\cos\theta$$

es la siguiente:

$$d\,q = 2\,\pi\,\sigma\,r\,d\,r$$

De la figura, observamos que $\tan\theta = \frac{r}{x}$, con lo cual $r = x\tan\theta$ y $d\,r = x\sec^2\theta\,d\,\theta$. De esta manera tenemos que:

$$d\,q = 2\pi\sigma(x\tan\theta)(x\sec^2\theta\,d\,\theta)$$

$$d\,q = 2\pi\sigma x^2\tan\theta\sec^2\theta\,d\,\theta$$

Adicionalmente $\cos\theta = \frac{x}{d}$, luego $d = \frac{x}{\cos\theta}$ ó $d = x\sec\theta$ y $d^2 = x^2\sec^2\theta$

Al sustituir $d\,q$, r y d en la expresión de la fuerza eléctrica (1):

$$F_x = k\,q_0 \int_0^Q \frac{2\pi\sigma x^2\tan\theta\sec^2\theta\,d\,\theta}{x^2\sec^2\theta}\cos\theta$$

Al simplificar:

$$F_x = 2\pi k\,q_0\sigma\int_0^{\theta_0}\tan\theta\cos\theta\,d\,\theta$$

$$F_x = 2\pi k\,q_0\sigma\int_0^{\theta_0}\operatorname{sen}\theta\,d\,\theta$$

$$F_x = 2\pi k\,q_0\sigma(-\cos\theta\,\big|_0^{\theta_0})$$

$$F_x = 2\pi k\,q_0\sigma(-\cos\theta_0 + 1)$$

$$F_x = 2\pi k\,q_0\sigma(1-\cos\theta_0)$$

De la figura: $\cos\theta_0 = \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}$. La expresión correspondiente a la fuerza eléctrica viene dada por:

$$\mathbf{F} = 2\pi k\,q_0\sigma\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\mathbf{i}$$ Unidades de fuerza.

Nota del autor.

El mecanismo indicado en esta última forma de solución es el equivalente a resolver la integral $F_x = 2\pi k q_0 \sigma x \int_0^R \frac{r\,dr}{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$ mediante una sustitución trigonométrica. Obviamente resulta más sencillo resolver esta integral mediante un cambio de variables, pero se describe el procedimiento y se hace la analogía con la sustitución trigonométrica para introducir esta forma de solución del problema. En situaciones posteriores queda a libertad del estudiante expresar (y resolver) las integrales utilizando la variable θ ó la variable *r*. De una manera particular, en este manual, el autor expresa las integrales de fuerza, campo eléctrico y potencial eléctrico en función de *r* y recurre a las tablas de integrales para su solución.

Fuerza eléctrica en función de la carga total del disco.

$$\mathbf{F} = 2\pi k q_0 \sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\mathbf{i}$$

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

$$S = \pi R^2$$

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

$$\mathbf{F} = 2\pi k q_0 \left(\frac{Q}{\pi R^2}\right)\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\mathbf{i}$$

$$\mathbf{F} = \frac{2k q_0 Q}{R^2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\mathbf{i}$$

Para una lámina infinita: $R \to \infty$.

$$\mathbf{F} = 2\pi k q_0 \sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\mathbf{i}$$

$$\mathbf{F} = 2\pi k q_0 \sigma \mathbf{i}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\mathbf{F} = 2\pi\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)q_0\sigma\,\mathbf{i}$$

$$\mathbf{F} = \frac{\sigma q_0}{2\varepsilon_0}\mathbf{i}$$ Unidades de fuerza.

Fuerza eléctrica en función de la carga total.

$$\mathbf{F} = 2\pi k\, q_0\sigma\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\mathbf{i}$$

$$\mathbf{F} = 2\pi k\, q_0\sigma\left(\frac{\sqrt{x^2+R^2}-x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\mathbf{i}$$

Se aplica la conjugada:

$$\mathbf{F} = 2\pi k\, q_0\sigma\left[\frac{(\sqrt{x^2+R^2}-x)(\sqrt{x^2+R^2}+x)}{\sqrt{x^2+R^2}\,(\sqrt{x^2+R^2}+x)}\right]\mathbf{i}$$

$$\mathbf{F} = 2\pi k\, q_0\sigma\left[\frac{x^2+R^2-x^2}{\sqrt{x^2+R^2}\,(\sqrt{x^2+R^2}+x)}\right]\mathbf{i}$$

$$\mathbf{F} = 2\pi k\, q_0\sigma\left[\frac{R^2}{\sqrt{x^2+R^2}\,(\sqrt{x^2+R^2}+x)}\right]\mathbf{i}$$

Si $x >> R \Rightarrow x^2+R^2 \approx x^2$

$$\mathbf{F} = 2\pi k\, q_0\sigma\left[\frac{R^2}{\sqrt{x^2}\,(\sqrt{x^2}+x)}\right]\mathbf{i}$$

$$\mathbf{F} = 2\pi k\, q_0\sigma\left[\frac{R^2}{x(x+x)}\right]\mathbf{i}$$

$$\mathbf{F} = 2\pi k\, q_0\sigma\left[\frac{R^2}{x(2x)}\right]\mathbf{i}$$

$$\mathbf{F} = 2\pi k\, q_0 \sigma \left(\frac{R^2}{2x^2} \right) \mathbf{i}$$

$$\mathbf{F} = \frac{\pi k\, q_0 \sigma R^2}{x^2} \mathbf{i}$$

Siendo $Q = \sigma \pi R^2$:

$\mathbf{F} = \frac{k\, Q\, q_0}{x^2} \mathbf{i}$ Unidades de fuerza.

La fuerza obtenida es la equivalente a la fuerza existente entre dos cargas puntuales cuyos valores son q_0 y Q separadas una distancia x, esto es, el disco se comporta como una carga puntual.

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **La Ley de Coulomb, Distribuciones continuas de carga en Discos,** perteneciente a la asignatura **Física, Electricidad**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

http://www.tutoruniversitario.com/

Si Usted requiere la resolución de ejercicios adicionales acerca de ésta u otras asignaturas, así como asesoría personalizada, contáctenos a través de los siguientes medios:

- WhatsApp: +58-4249744352 (En forma directa o desde nuestra página web).
- E-mail: medinawj@gmail.com

Lista de asignaturas en las cuales podemos ayudarle:

Cálculo Diferencial.	Cálculo Integral.	Cálculo Vectorial.
Ecuaciones Diferenciales.	Trigonometría.	Matemáticas Aplicadas.
Matemáticas Financieras.	Álgebra Lineal.	Métodos Numéricos.
Estadística.	Física (Mecánica).	Física (Electricidad).
Mecánica Vectorial (Estática).	Química Inorgánica.	Fisicoquímica.
Termodinámica.	Termodinámica Química.	Mecánica de Fluidos.
Fenómenos de Transporte.	Transferencia de Calor.	Ingeniería Económica.