

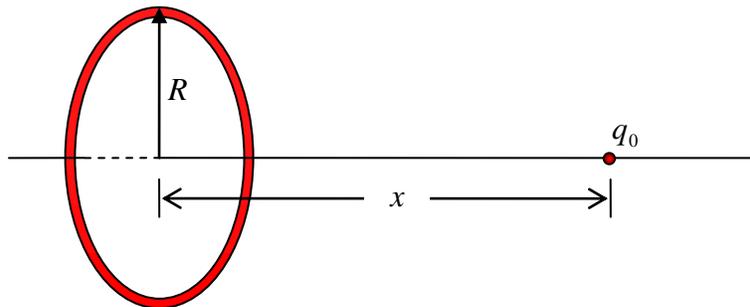
Ejemplo 25-5 del Resnick - Halliday. Quinta Edición. Página 577.

Anillo con carga. La figura muestra un anillo delgado de radio R que tiene una carga positiva q distribuida uniformemente, de manera que la densidad de carga lineal es $\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$. a) Calcular la fuerza que ejerce el anillo sobre la carga puntual positiva q_0 ,

ubicada en el eje del anillo (que consideraremos como el eje positivo x), a una distancia x del centro del anillo. b) Demostrar que el resultado que se obtiene de la parte a) es

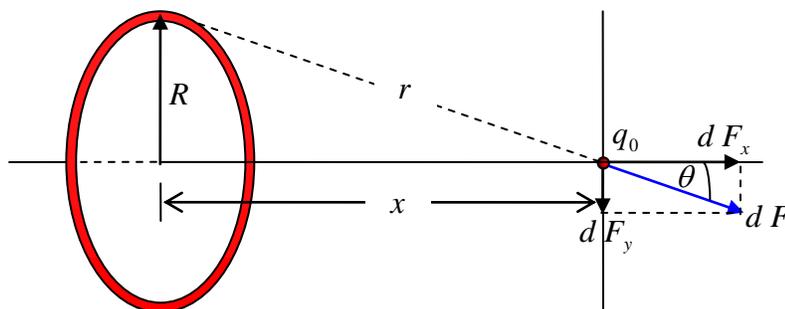
$F = \frac{k q_0 q}{x^2}$ para $x \gg R$. Explicar el resultado. c) Determine el punto del valor máximo de

la fuerza eléctrica y la fuerza eléctrica máxima.



Solución.

Se considera un elemento diferencial de carga ($d q$) sobre el anillo. La influencia que ejerce dicho elemento sobre la carga q_0 colocada en el punto P es de repulsión, con un diferencial de fuerza eléctrica $d F$ (orientado con un ángulo θ respecto a la horizontal). $d F$ se descompone en sus componentes rectangulares $d F_x$ y $d F_y$.



Componentes rectangulares de la fuerza eléctrica.

Componente horizontal.

$$d F_x = d F \cos \theta$$

$$\int d F_x = \int d F \cos \theta$$

$$F_x = \int d F \cos \theta$$

Componente vertical.

$$d F_y = d F \operatorname{sen} \theta$$

$$\int d F_y = \int d F \operatorname{sen} \theta$$

$$F_y = \int d F \operatorname{sen} \theta$$

La fuerza que ejerce el diferencial de carga indicado y la fuerza del diferencial de carga correspondiente en el lado inferior son iguales y simétricos con respecto al eje x . Las componentes verticales de las fuerzas debidas a dichos diferenciales de carga se anulan entre sí, mientras que las componentes horizontales de las fuerzas son aditivas.

$$F_y = 0$$

El diferencial de la fuerza eléctrica viene dado por:

$$d F = k \frac{q_0 d q}{r^2}$$

Componente horizontal de la fuerza eléctrica.

$$F_x = \int_0^{\rho} k \frac{q_0 d q}{r^2} \cos \theta$$

$$F_x = k q_0 \int_0^{\rho} \frac{d q}{r^2} \cos \theta$$

Distancia entre el elemento diferencial de carga ($d q$) y la carga q_0 .

$$r^2 = x^2 + R^2$$

$$r = \sqrt{x^2 + R^2}$$

Ángulo que forma el diferencial de la fuerza eléctrica ($d F$) con la horizontal.

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

Al sustituir r y $\cos \theta$ en la expresión de la fuerza eléctrica:

$$F_x = k q_0 \int_0^Q \frac{dq}{x^2 + R^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$F_x = \frac{k q_0 x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^Q dq$$

$$F_x = \frac{k q_0 x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} Q$$

$$F_x = \frac{k q_0 Q x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathbf{F} = \frac{k q_0 Q x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{i} \text{ Unidades de fuerza.}$$

Fuerza eléctrica en función de la densidad lineal de carga del anillo.

$$\mathbf{F} = \frac{k q_0 Q x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{i}$$

$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

$$Q = \lambda L$$

$$L = 2\pi R$$

$$Q = 2\pi \lambda R$$

$$\mathbf{F} = \frac{k q_0 (2\pi \lambda R) x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{i}$$

$$\mathbf{F} = \frac{2\pi k q_0 \lambda R x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{i}$$

c) Para un valor máximo de la fuerza eléctrica.

$$\frac{dF}{dx} = 0$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{k q_0 Q (x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} - k q_0 Q x \times \frac{3}{2} (x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} (2x)}{(x^2 + R^2)^3}$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{k q_0 Q (x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} - 3k q_0 Q x^2 (x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + R^2)^3}$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{k q_0 Q (x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} (x^2 + R^2 - 3x^2)}{(x^2 + R^2)^3}$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{k q_0 Q (x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} (R^2 - 2x^2)}{(x^2 + R^2)^3}$$

$$\frac{k q_0 Q (x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} (R^2 - 2x^2)}{(x^2 + R^2)^3} = 0$$

$$R^2 - 2x^2 = 0$$

$$2x^2 = R^2$$

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Fuerza eléctrica máxima.

$$\mathbf{F} = \frac{k q_0 Q x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{i}$$

$$F_{\max} = \frac{k q_0 Q x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \Big|_{x=\frac{R}{\sqrt{2}}}$$

$$F_{\max} = \frac{\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right) q_0 Q \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)}{\left[\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$F_{\max} = \frac{R q_0 Q}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{2}R^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$F_{\max} = \frac{R q_0 Q}{4 \sqrt{2} \pi \varepsilon_0 \left(\frac{3}{2} R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$F_{\max} = \frac{R q_0 Q}{4 \sqrt{2} \pi \varepsilon_0 \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} R^3}$$

$$F_{\max} = \frac{q_0 Q}{4 \sqrt{2} \pi \varepsilon_0 \times \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} R^2}$$

$$F_{\max} = \frac{q_0 Q}{6 \sqrt{2} \pi \varepsilon_0 \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} R^2}$$

$$F_{\max} = \frac{q_0 Q}{6 \sqrt{3} \pi \varepsilon_0 R^2} \text{ Unidades de fuerza.}$$

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **La Ley de Coulomb, Distribuciones continuas de carga en Anillos**, perteneciente a la asignatura **Física, Electricidad**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

<http://www.tutoruniversitario.com/>

Si Usted requiere la resolución de ejercicios adicionales acerca de ésta u otras asignaturas, así como asesoría personalizada, contáctenos a través de los siguientes medios:

- WhatsApp: +58-4249744352 (En forma directa o desde nuestra página web).
- E-mail: medinawj@gmail.com

Lista de asignaturas en las cuales podemos ayudarle:

Cálculo Diferencial.	Cálculo Integral.	Cálculo Vectorial.
Ecuaciones Diferenciales.	Trigonometría.	Matemáticas Aplicadas.
Matemáticas Financieras.	Álgebra Lineal.	Métodos Numéricos.
Estadística.	Física (Mecánica).	Física (Electricidad).
Mecánica Vectorial (Estática).	Química Inorgánica.	Fisicoquímica.
Termodinámica.	Termodinámica Química.	Mecánica de Fluidos.
Fenómenos de Transporte.	Transferencia de Calor.	Ingeniería Económica.