ESTIMACIÓN E INTERVALOS DE CONFIANZA.

Estimador puntual. Estadístico que se calcula a partir de la información de la muestra y se utiliza para estimar el parámetro de la población. Un estimador puntual utiliza un número único o valor para localizar una estimación del parámetro.

Valor alfa (α) o nivel de confianza. Es la probabilidad de error o la probabilidad de que un intervalo dado no contenga la media poblacional desconocida.

Intervalo de confianza. Rango de valores creado a partir de los datos de la muestra, de modo que el parámetro poblacional es probable que ocurra dentro de ese rango en una probabilidad específica. Esta última se llama *nivel de confianza.* Un intervalo de confianza denota un rango dentro del cual puede encontrarse el parámetro, y en el nivel de confianza que el intervalo contiene del parámetro.

Error estándar de la distribución muestral de las medias muestrales (Error estándar de la muestra).

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Estimación del error estándar de la distribución muestral de las medias muestrales (Error estándar de la muestra).

$$s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

1.- INTERVALOS DE CONFIANZA PARA MEDIAS.

1.1.- Intervalo de confianza para μ, σ conocida.

Si $\bar{X}$ es el valor de la media de una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población normal con la varianza conocida σ^2, un intervalo de confianza de $(1-\alpha)\%$ para μ está dado por:

Lateral izquierdo (límite superior)

$$-\infty < \mu \le \bar{X} + z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Bilateral

$$\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Lateral derecho (límite inferior)

$$\bar{X} - z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu < +\infty$$

donde $z_{\alpha/2}$ es tal que la integral de la densidad normal estándar de $z_{\alpha/2}$ a ∞ es $\alpha/2$.

1.2.- Intervalo de confianza para la media de la población con σ desconocida y muestras grandes ($n \ge 30$).

Si $\bar{X}$ es el valor de la media de una muestra aleatoria de tamaño $n \ge 30$ tomada de una población normal con la varianza desconocida σ^2, un intervalo de confianza de $(1-\alpha)\%$ para μ está dado por:

Lateral izquierdo

$$-\infty < \mu \le \bar{X} + z_{\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Bilateral

$$\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Lateral derecho

$$\bar{X} - z_{\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu < +\infty$$

Grados de libertad.

El número de observaciones menos el número de restricciones impuestas sobre tales observaciones.

1.3.- Intervalo de confianza para μ, σ desconocida y muestra pequeña.

Si $\bar{X}$ y s son los valores de le media y la desviación estándar de una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población normal con la varianza desconocida σ^2, un intervalo de confianza de $(1-\alpha)\%$ para μ está dado por

Lateral izquierdo

$$-\infty < \mu \le \bar{X} + t_{\alpha;n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Bilateral

$$\bar{X} - t_{\alpha/2;n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + t_{\alpha/2;n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Lateral derecho

$$\bar{X} - t_{\alpha;n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu < +\infty$$

donde $t_{\alpha/2,n-1}$ es el valor en la tabla de percentiles de la distribución t de Student para α y $(n-1)$ grados de libertad.

Factor de corrección para una población finita.

Para una población finita, donde el número total de objetos es N y el tamaño de la muestra es n, se realiza el ajuste siguiente a los errores estándar de las medias y proporciones de la muestra.

Error estándar de la media de las muestras, utilizando el factor de corrección para poblaciones finitas.

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Muestras independientes.

Error estándar de las diferencias entre medias muestrales.

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Estimación del error estándar de la diferencia entre medias muestrales.

$$s_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

2.- INTERVALOS DE CONFIANZA PARA DIFERENCIAS ENTRE MEDIAS

2.1.- Intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$, σ_1^2 y σ_2^2 conocidas.

Si $\bar{X}_1$ y $\bar{X}_2$ son las medias de muestras aleatorias independientes de tamaño n_1 y n_2 tomadas de poblaciones normales con varianzas σ_1^2 y σ_2^2 conocidas, un intervalo de confianza de $(1-\alpha)\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ está dado por

Lateral izquierdo (límite superior): $$-\infty < \mu_1 - \mu_2 \le (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Bilateral: $$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Lateral derecho (límite inferior): $$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 < +\infty$$

2.2.- Intervalo de confianza para la diferencia de medias (muestras grandes).

Condiciones:

1.- Las dos muestras no deben estar relacionadas, es decir, deben ser independientes.

2.- Las muestras deben ser suficientemente grandes para que la distribución de las medias muestrales siga una distribución normal. La práctica común consiste en pedir que ambas muestras tengan por lo menos 30 observaciones.

Lateral izquierdo (límite superior): $$-\infty < \mu_1 - \mu_2 \le (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{\alpha}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Bilateral: $$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Lateral derecho (límite inferior): $$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{\alpha}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 < +\infty$$

2.3.- Intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$, $\sigma_1 = \sigma_2$ desconocida.

Si $\bar{X}_1$ y $\bar{X}_2$ son las medias de muestras aleatorias independientes de tamaño n_1 y n_2 tomadas de poblaciones normales con varianzas σ_1^2 y σ_2^2 desconocidas pero iguales, un intervalo de confianza de $(1-\alpha)\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ está dado por

Bilateral: $$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\alpha/2;n_1+n_2-2}\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \le \mu_1 - \mu_2 \le (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\alpha/2;n_1+n_2-2}\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

donde $s_p^2 = \dfrac{(n_1-1)(s_1^2) + (n_2-1)(s_2^2)}{n_1+n_2-2}$ (Varianza combinada.)

2.4.- Intervalo de confianza para la diferencia de medias poblacionales (muestras pequeñas) cuando $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$ desconocidas.

Grados de libertad cuando las varianzas poblacionales no son iguales.

$$g.l = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{(s_1^2/n_1)^2(n_1-1) + (s_2^2/n_2)^2(n_2-1)}$$

Bilateral: $$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\alpha/2;g.l}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\alpha/2;g.l}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

2.5.- Muestras dependientes o muestras por pares.

Intervalo de confianza para la media poblacional de la distribución de las diferencias.

Lateral izquierdo	Bilateral	Lateral derecho
$-\infty < \mu \le \bar{d} + t_{\alpha;n-1}\dfrac{s_d}{\sqrt{n}}$	$\bar{d} - t_{\alpha/2;n-1}\dfrac{s_d}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{d} + t_{\alpha/2;n-1}\dfrac{s_d}{\sqrt{n}}$	$\bar{d} - t_{\alpha;n-1}\dfrac{s_d}{\sqrt{n}} \le \mu < +\infty$

$\bar{d}$ es la media de la diferencia entre las observaciones por pares o relacionadas.

s_d es la desviación estándar de las diferencias entre las observaciones por pares o relacionadas.

n es el número de observaciones por pares.

Proporción.

Fracción, razón o porcentaje que indica la parte de la muestra o la población que tiene un rasgo de interés en particular.

Proporción de la muestra.

Si p representa la proporción de la muestra, X el número de "éxitos" y n el número de elementos en la muestra, podemos determinar la proporción de la muestra como sigue: $p = X/n$.

Error estándar de la distribución muestral de las proporciones muestrales.

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

Estimación del error estándar de la distribución de las proporciones muestrales.

$$s_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Error estándar de las proporciones de las muestras, utilizando el factor de corrección para poblaciones finitas.

$$s_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

3.- INTERVALOS DE CONFIANZA PARA PROPORCIONES.

Intervalo de confianza de muestra grande para π.

Un intervalo de confianza aproximado de $(1-\alpha)\%$ para el parámetro binomial p está dado por

Bilateral: $p - z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} \le \pi \le p + z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$, donde $p = \dfrac{X}{n}$

Proporción conjunta.

Se conoce como el estimador agrupado de la proporción poblacional y se calcula a partir de la formula siguiente

$$p_c = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

X_1 es el número al procesar la característica en la primera muestra.
X_2 es el número al procesar la característica en la segunda muestra.
n_1 es el número de observaciones en la primera muestra.
n_2 es el número de observaciones en la segunda muestra.

4.- INTERVALOS DE CONFIANZA PARA DIFERENCIAS ENTRE PROPORCIONES.

Intervalo de confianza de muestra grande para $\pi_1 - \pi_2$.

Un intervalo de confianza aproximado de $(1-\alpha)\%$ para $\pi_1 - \pi_2$, la diferencia entre dos parámetros binomiales, está dada por

$$(p_1 - p_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} \le \pi_1 - \pi_2 \le (p_1 - p_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

$$(p_1 - p_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{p_c(1-p_c)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \le \pi_1 - \pi_2 \le (p_1 - p_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{p_c(1-p_c)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

donde p_c es la proporción agrupada al procesar la característica en las muestras combinadas.

5.- INTERVALOS DE CONFIANZA PARA VARIANZAS.

Intervalo de confianza para σ^2.

Si s^2 es el valor de la varianza de una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población normal, un intervalo de confianza de $(1-\alpha)\%$ para σ^2 está dado por

Lateral izquierdo (límite superior)	Bilateral	Lateral derecho (límite inferior)
$0 < \sigma^2 \le \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha;n-1}}$	$\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}} \le \sigma^2 \le \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}}$	$\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha;n-1}} \le \sigma^2 < \infty$

Se pueden obtener límites de confianza de $(1-\alpha)\%$ correspondientes para σ sacando las raíces cuadradas de los límites de confianza para σ^2.

6.- INTERVALOS DE CONFIANZA PARA RAZONES DE DOS VARIANZAS.

6.1.- Intervalo de confianza para σ_1^2/σ_2^2.

Si s_1^2 y s_2^2 son los valores de las varianzas de muestras aleatorias independientes de tamaño n_1 y n_2 tomadas de dos poblaciones normales, un intervalo de confianza de $(1-\alpha)\%$ para σ_1^2/σ_2^2 está dado por

Bilateral: $\dfrac{s_1^2}{s_2^2}F_{1-\alpha/2;n_2-1,n_1-1} \le \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \dfrac{s_1^2}{s_2^2}F_{\alpha/2;n_2-1,n_1-1}$

Se pueden obtener límites de confianza de $(1-\alpha)\%$ correspondientes a σ_1/σ_2 obteniendo las raíces cuadradas de los límites de confianza para σ_1^2/σ_2^2.

Elección del tamaño apropiado de una muestra.

Tamaño de la muestra para estimar la media de la población.

El tamaño apropiado de la muestra depende de tres factores:

1.- El nivel de confianza deseado.
2.- El margen de error que el investigador va a tolerar.
3.- La variabilidad en la población que se estudia.

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}s}{E}\right)^2$$

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}s}{x-\mu}\right)^2$$

n es el tamaño de la muestra.
z es el valor normal estándar correspondiente al nivel de confianza deseado.
s es un estimado de la desviación estándar de la población.
E es el error máximo admisible.

Tamaño de la muestra para estimar la proporción de la población.

El tamaño apropiado de la muestra depende de tres factores:

1.- El nivel de confianza deseado.
2.- El margen de error en la proporción de la población.
3.- Un estimado de la proporción de la población.

$n = p(1-p)\left(\dfrac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2$; $n = p(1-p)\left(\dfrac{z_{\alpha/2}}{p-\pi}\right)^2$. Independiente de p: $n = 0.25\left(\dfrac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2$

donde n es el tamaño de la muestra.
z es el valor normal estándar correspondiente al nivel de confianza deseado.
p es un estimado de la proporción de la población. Si no hay estimador disponible, utilice 0.50.
E es el error máximo admisible.

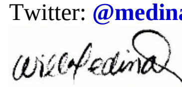
Tamaño de la muestra para estimar la diferencia entre medias poblacionales.

$n = \left(\dfrac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$; $n = \left[\dfrac{z_{\alpha/2}}{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}\right]^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Tamaño de la muestra para estimar la diferencia entre proporciones poblacionales.

$n = \left(\dfrac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2[\pi_1(1-\pi_1) + \pi_2(1-\pi_2)]$; $n = \left[\dfrac{z_{\alpha/2}}{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)}\right]^2[\pi_1(1-\pi_1) + \pi_2(1-\pi_2)]$

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**.
Teléfono / WhatsApp: **+58-424-9744352**
e-mail: **medinawj@gmail.com**
Twitter: **@medinawj**



El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:
https://www.tutoruniversitario.com/
Puerto La Cruz, abril de 2025.