DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD.

Variable aleatoria. Una **variable aleatoria** es una función que asigna un número real a cada resultado del espacio muestral de un experimento aleatorio.

DISTRIBUCIONES DISCRETAS.

Variable aleatoria discreta. Una variable aleatoria es discreta si puede asumir cuando mucho un número finito o uno infinito contable de valores posibles. Ejemplo: número de rayaduras en una superficie, proporción de partes defectuosas entre 1000 probadas, número de bits transmitidos recibidos con error

Densidad discreta. Sea X una variable aleatoria discreta. La función f dada por $f(x) = P(X = x)$ para el número real x se llama función de densidad de X.

Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea una densidad discreta.

1.- $f(x) \geq 0$ 2.- $\sum_{\forall x} f(x) = 1$

Distribución acumulativa: Discreta. Sea X una variable aleatoria discreta con densidad f. La distribución acumulativa de X, denotada con F, se define con la fórmula siguiente:

$F(x) = P(X \leq x)$ para todo número real x.

Valor esperado. Sea X una variable aleatoria discreta con densidad f. Sea $H(X)$ una variable aleatoria. El valor esperado de $H(X)$, que se denota con $E[H(X)]$, está dado por $E[H(X)] = \sum_{\forall x} H(x) f(x)$, siempre y cuando $\sum_{\forall x} |H(x)| f(x)$ sea finita. La suma abarca todos los valores de X que ocurran con probabilidad distinta de cero.

Valor esperado de X. $E[X] = \sum_{\forall x} x f(x)$

Propiedades de la esperanza.

1.- El valor esperado de una variable aleatoria es su valor promedio teórico. Se denota por $E[X]$ y puede calcularse a partir del conocimiento de la densidad de X. **2.-** En el contexto estadístico, el valor promedio de X se llama *valor medio* o *media*. Así pues, son intercambiables los términos *valor promedio*, *valor medio*, *media* y *valor esperado*. **3.-** El valor medio de X se denota con la letra griega mu (μ). Así pues, los símbolos μ y $E[X]$ son intercambiables.

4.- La media o valor esperado de X es una medición de la localización del centro de los valores de X. Por tal razón, se llama parámetro de "localización" a μ.

Reglas de la esperanza.

1.- $E[c] = c$ (El valor esperado de toda constante es esa constante)

2.- $E[cX] = c\,E[X]$ (Las constantes se pueden factorizar a partir de las esperanzas).

3.- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$ (el valor esperado de una suma es igual a la suma de los valores esperados).

Varianza. Sea X una variable aleatoria con media μ. La varianza de X, denotada como Var X ó σ^2, está dada por:

$Var\ X = \sigma^2 = E[(X-\mu)^2]$

Fórmula de cálculo de σ^2.

$\sigma^2 = Var\ X = E[x^2] - (E[X])^2$

Desviación estándar. Sea X una variable aleatoria con varianza σ^2. La desviación estándar de X, denotada con σ, está dada por:

$\sigma = \sqrt{\text{Var } X} = \sqrt{\sigma^2}$

Propiedades de la desviación estándar.

1.- La desviación estándar de X se define como la raíz cuadrada no negativa de su varianza. **2.-** La desviación estándar se denota con σ, y la varianza de X, con σ^2. **3.-** Que la desviación estándar sea grande implica que la variable aleatoria X es más bien inconstante y hasta cierto punto de difícil predicción, mientras que una desviación estándar pequeña indica constancia y estabilidad. **4.-** La desviación estándar siempre se expresa en unidades físicas de medición que corresponden a los datos originales. La varianza suele estar desprovista de unidades.

Reglas de la varianza.

1.- $Var\ c = 0$ 2.- $Var\ c\,X = c^2\ Var\ X$

3.- Si X y Y son independientes, entonces $Var(X \pm Y) = Var\ X + Var\ [Y]$

Distribución discreta uniforme. Una variable aleatoria X es una variable aleatoria discreta uniforme si cada uno de los n valores de su rango, por ejemplo, $x_1, x_{2,\ldots,} x_n$, tiene la misma probabilidad. Entonces $f(x_i) = 1/n$.

Suponga que X es una variable aleatoria discreta uniforme en los enteros consecutivos $a, a+1, a+2, \ldots, b$, para $a \leq b$.

La media de X es $\mu = E(X) = (a + b)/2$.

La varianza de X es $\sigma^2 = V(x) = \dfrac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$

Experimento binomial. Un experimento aleatorio que consta de n ensayos repetidos tales que: **1.-** los ensayos son independientes. **2-** cada ensayo produce únicamente dos resultados posibles, etiquetados como "éxito" o "fracaso", y **3.-** la probabilidad de un éxito en cada ensayo, denotada como p, permanece constante se llama *experimento binomial.*

Distribución binomial. La variable aleatoria X que es igual a número de ensayos que producen un éxito tiene una **distribución binomial** con parámetros p y n = 1, 2,…

La función de densidad de probabilidad de X es $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, \ldots, n$

Si X es una variable aleatoria binomial con parámetros p y n, entonces $\mu = E(X) = n\,p$ y $\sigma^2 = V(X) = n\,p\,(1-p)$

Distribución geométrica. En una serie de ensayos de Bernoulli independientes, con probabilidad constante p de un éxito, sea que la variable X denote el número de ensayos hasta el primer éxito. Entonces X tiene una **distribución geométrica** con parámetro p y

$f(x) = (1-p)^{x-1} p$, $x = 1, 2, \ldots$

Si X es una variable aleatoria geométrica con parámetro p, entonces la media y la varianza de X son $\mu = E(X) = 1/p$ y

$\sigma^2 = V(X) = (1-p)/p^2$.

Distribución binomial negativa. En una serie de ensayos de Bernoulli independientes, con probabilidad constante p de éxito, sea que la variable aleatoria X denote el número de ensayos hasta que ocurran r éxitos. Entonces X tiene una **distribución binomial negativa** con parámetros p y r = 1, 2, 3, … y

$f(x) = \binom{x-1}{r-1} (1-p)^{x-r} p^r$ para $x = r, r+1, r+2, \ldots$

Si X es una variable aleatoria binomial negativa con parámetros p y r, entonces la media y la varianza de X son $\mu = E(X) = r/p$ y $\sigma^2 = V(X) = r(1-p)/p^2$

Distribución multinomial. Supongamos que los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son mutuamente excluyentes y pueden ocurrir con las probabilidades respectivas $p_1, p_2, \ldots, p_k$, donde $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$. Si $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son variables aleatorias que indican respectivamente el número de veces que $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ocurren en un número n de pruebas, de manera que $X_1 + X_2 + \ldots + X_k = n$, entonces

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_K = n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$$

Distribución hipergeométrica. Un conjunto de N objetos contiene K objetos clasificados como éxitos y $N - K$ objetos clasificados como fracasos. Se selecciona una muestra con tamaño de n objetos al azar (sin reemplazo) de los N objetos, donde $K \leq N$ y $n \leq N$. Sea que la variable aleatoria X denote el número de éxitos en la muestra. Entonces X tiene una **distribución hipergeométrica** y

$$f(x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x = \min\{K, n\} \text{ hasta } \max\{0, n+K-N\}$$

Si X es una variable aleatoria hipergeométrica con parámetros N, K, y n, entonces la media y varianza de X son $\mu = E(X) = n\,p$ y $\sigma^2 = V(X) = n\,p(1-p)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ donde $p = K/N$. La expresión $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ se conoce como **factor de corrección para poblaciones finitas.**

Proceso de Poisson. Dado un intervalo de números reales, suponga que ocurren conteos al azar a lo largo del intervalo. Si puede hacerse la partición del intervalo en subintervalos con una longitud suficientemente pequeña tal que **1.-** La probabilidad de más de un conteo en un subintervalo es cero. **2.-** La probabilidad de un conteo en un subintervalo es la misma para todos los subintervalos y proporcional a la longitud del subintervalo, y **3.-** El conteo en cada subintervalo es independiente de los demás subintervalos, entonces el experimento aleatorio se denomina *proceso de Poisson.*

Distribución de Poisson. Si el número promedio de conteos en el intervalo es $\lambda > 0$, la variable aleatoria X que es igual al número de conteos en el intervalo, tiene una **distribución de Poisson** con parámetro λ, y la función de densidad de probabilidad de X es

$f(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$

Si X es una variable aleatoria de Poisson con parámetro λ, entonces la media y la varianza de X son $\mu = E(X) = \lambda$ y $\sigma^2 = V(X) = \lambda$.

Pasos en la solución de un problema de Poisson. Los pasos siguientes se usan para resolver un problema de Poisson aplicado: **1.-** Determinar la unidad de medición básica que se usa. **2.-** Determinar el número promedio de casos del evento por unidad. Este número se denota con λ. **3.-** Determinar la magnitud o tamaño del periodo de observación. Se denota con S. **4.-** La variable aleatoria X, el número de ocurrencias del evento en el intervalo de tamaño S, corresponde a una distribución de Poisson, con parámetro $k = \lambda\, S$.

Relación entre la distribución binomial y la distribución de Poisson. En la distribución binomial, si n es grande y la probabilidad de ocurrencia de un suceso es muy pequeña, de modo que $1 - p$ es casi 1, el suceso se llama un suceso raro. En la práctica, un suceso se considera raro si el número de ensayos es al menos 50 $(n \geq 50)$ mientras $n\,p$ es menor que 5. En tal caso, la distribución binomial queda aproximada muy estrechamente por la distribución de Poisson con $\lambda = n\,p$.

DISTRIBUCIONES CONTINUAS.

Variable aleatoria continua. Una variable aleatoria **continua** es una variable aleatoria que tiene como rango un intervalo (sea finito o infinito) de números reales. Ejemplo: corriente eléctrica, longitud, presión, temperatura, tiempo, voltaje, peso.

Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea una densidad continua. Para una variable aleatoria continua X, una **función de densidad de probabilidad** es una función tal que

1.- $f(x) \geq 0$ 2.- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

3.- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$ (Área bajo $f(x)$ de a a b, para a y b cualesquiera).

Si X es una variable aleatoria continua, entonces para cualesquiera x_1 y x_2: $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X < x_2)$

Media y varianza de una variable aleatoria continua. Suponga que X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$.

La **media** o **valor esperado** de X, denotada como μ ó $E(X)$, es $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx$

La **varianza** de X, denotada como $V(X)$ ó σ^2 es $\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \mu^2$

La **desviación estándar** de X es $\sigma = [V(X)]^{\frac{1}{2}}$

Distribución continua uniforme. Una variable aleatoria continua X con una función de densidad de probabilidad

$f(x) = \dfrac{1}{b-a}$, $a \leq x \leq b$ tiene una **distribución continua uniforme**.

En una distribución continua uniforme las probabilidades son las mismas para todos los posibles resultados.

$f(x) = k$

La media y la varianza de una variable aleatoria continua uniforme X en $a \leq x \leq b$ son $\mu = E(X) = (a + b)/2$ y $\sigma^2 = V(X) = (b - a)^2/12$.

Probabilidad de que una observación caiga entre dos valores:

$P(x_1 < X < x_2) = \dfrac{x_2 - x_1}{b-a}$; $P(X < x_1) = \dfrac{x_1 - a}{b-a}$; $P(X > x_2) = \dfrac{b - x_2}{b-a}$

Distribución normal. Una variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ para $-\infty < x < \infty$ tiene una distribución normal con parámetro μ, donde $-\infty < \mu < \infty$, y $\sigma > 0$. Además $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$.

A una variable aleatoria normal con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$ se le llama **variable normal estándar**. Una variable aleatoria normal están se denota como Z.

La función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar se denota como $F(z) = P(Z \leq z)$.

Si X es una variable aleatoria normal con $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$, entonces la variable aleatoria $Z = (X - \mu)/\sigma$ es una variable aleatoria normal con $E(Z) = 0$ y $V(Z) = 1$. Es decir, Z es una variable aleatoria normal estándar.

Suponga que X es una variable aleatoria normal con media μ y varianza σ^2. Entonces,

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq z)$$

donde Z es una variable aleatoria normal estándar, y $z = (x - \mu)/\sigma$ es el **valor** z que se obtiene al estandarizar X.

Aproximación normal a la distribución binomial. Si X es una variable aleatoria binomial, entonces $Z = \dfrac{X - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}$ es aproximadamente una variable aleatoria normal estándar. La aproximación es buena para $n\,p > 5$ y $n\,(1 - p) > 5$.

Corrección de continuidad. La aproximación normal de una probabilidad binomial en ocasiones se modifica con un factor de corrección de 0.5 que mejora la aproximación.

$P(X \leq x_1) = P(X < x_1 + 0.5)$ $P(X < x_1) = P(X < x_1 - 0.5)$

$P(X \geq x_1) = P(X > x_1 - 0.5)$ $P(X > x_1) = P(X > x_1 + 0.5)$

$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 - 0.5 < X < x_2 + 0.5)$

$P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 + 0.5 < X < x_2 + 0.5)$

$P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 - 0.5 < X < x_2 - 0.5)$

$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 + 0.5 < X < x_2 - 0.5)$

$P(X = x_1) = P(X < x_1 + 0.5) - P(X < x_1 - 0.5)$

Aproximación normal a la distribución de Poisson. Si X es una variable aleatoria de Poisson con , $E(X) = \lambda$ y $V(X) = \lambda$ entonces $Z = \dfrac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ es aproximadamente una variable aleatoria normal estándar. La aproximación es buena para $\lambda > 5$.

Distribución exponencial. La variable aleatoria X que es igual a la distancia entre conteos sucesivos de un proceso de Poisson con media $\lambda > 0$ tiene una **distribución exponencial** con parámetro λ. La función de densidad de probabilidad de X es

$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$, para $0 \leq x < \infty$

Si la variable aleatoria X tiene una distribución exponencial con parámetro λ, entonces:

i) la función de distribución acumulada de X es $F(x) = P(X < x) = 1 - e^{-\lambda x}$

ii) la media y la varianza de X son $\mu = E(X) = 1/\lambda$ y $\sigma^2 = V(X) = 1/\lambda^2$.

Distribución de Erlang. La variable aleatoria X que es igual a la longitud del intervalo hasta que ocurren r fallas en un proceso de Poisson con media $\lambda > 0$ tiene una **distribución de Erlang** con parámetros λ y r. La función de densidad de probabilidad de X es

$f(x) = \dfrac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!}$ para $x > 0$ y $r = 1, 2, \ldots$

Si X es una variable aleatoria de Erlang con parámetros λ y r, entonces la media y la varianza de X son $\mu = E(X) = r/\lambda$ y $\sigma^2 = V(X) = r/\lambda^2$

Función gamma. Definición. La función gamma es $\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x}\,dx$ para $r > 0$.

Distribución Gamma. La variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad $f(x) = \dfrac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}$, para $x > 0$

Si X es una variable aleatoria gamma con parámetros λ y r, entonces la media y la varianza de X son $\mu = E(X) = r/\lambda$ y $\sigma^2 = V(X) = r/\lambda^2$

Distribución Beta. Se dice que una variable aleatoria X tiene una *distribución beta*, o está distribuida beta, si la función de densidad es

$f(x) = \dfrac{\Gamma(r+\beta)}{\Gamma(r)\Gamma(\beta)} x^{r-1}(1-x)^{\beta-1}$ para $0 < x < 1$

Si X es una variable aleatoria beta con parámetros r y β, entonces la media y la varianza de X son $\mu = E(X) = \dfrac{r}{r+\beta}$ y

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{r\beta}{(r+\beta)^2(r+\beta+1)}$$

Distribución de Weibull. La variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad $f(x) = \dfrac{\beta}{\delta}\left(\dfrac{x}{\delta}\right)^{\beta-1} e^{-(\frac{x}{\delta})^\beta}$, para $x > 0$

tiene una distribución de Weibull con parámetro de escala $\delta > 0$ y parámetro de forma $\beta > 0$.

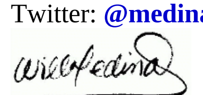
Si X tiene una distribución de Weibull con parámetros δ y β, entonces:

i) la función de distribución acumulada de X es $F(x) = P(X < x) = 1 - e^{-(\frac{x}{\delta})^\beta}$

ii) la media y la varianza de X son $\mu = E(X) = \delta\,\Gamma\left(1 + \dfrac{1}{\beta}\right)$ y

$$\sigma^2 = V(X) = \delta^2\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \delta^2\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^2$$

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**.
Teléfono / WhatsApp: **+58-424-9744352**
e-mail: **medinawj@gmail.com**
Twitter: **@medinawj**



El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:
https://www.tutoruniversitario.com/
Puerto La Cruz, abril de 2025.