PROBABILIDAD.

1.- Definiciones.

Experimento aleatorio.

Un **experimento aleatorio** es aquel que puede producir resultados diferentes, aún cuando se repita siempre de la misma manera.

Espacio muestral. Definición.

Al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se le llama espacio muestral del experimento. El espacio muestral se denota por *S*.

Evento.

Un **evento** es un subconjunto del espacio muestral de un experimento aleatorio.

Eventos mutuamente excluyentes.

Se dice que dos eventos, denotados como E_1 y E_2, tales que $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ son **mutuamente excluyentes**.

Probabilidad.

La probabilidad es un número que se asigna a cada miembro de una colección de eventos de un experimento aleatorio.

Probabilidad a priori.

La probabilidad *a priori* (o probabilidad anterior) de un suceso es la que se le asigna *antes* de que se tenga noticia de que ha ocurrido.

Probabilidad total.

La **probabilidad total** de un evento es la suma exhaustiva de las probabilidades de todos los casos mutuamente excluyentes que conducen a dicho evento.

Enfoque clásico de probabilidad.

Si un evento puede ocurrir en *h* maneras diferentes de un número total de *n* maneras posibles, todos ellos son igualmente posibles. Entonces, la probabilidad del evento es *h*/*n*.

Enfoque frecuentista de probabilidad.

Si después de *n* repeticiones de un experimento, donde *n* es muy grande, se observa que un evento ocurre *h* veces, entonces la probabilidad de dicho evento es *h*/*n*. Esto también se denomina la *probabilidad empírica* de un evento.

2.- Axiomas de la teoría de las probabilidades.

- Si A es un evento cualquiera, entonces $0 \le P(A) \le 1$.
- Si A y B son dos eventos independientes, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Si S es el espacio muestral, entonces *P* (*S*) = 1

3.- Teoremas de la teoría de las probabilidades.

- El conjunto $\varnothing$ (conjunto vacío) se llama *evento imposible* y su probabilidad es cero, es decir, en símbolos: $P(\varnothing) \le 0$

- Regla de la complementación.

Si *A* es un evento cualquiera, entonces se verifica siempre la igualdad $P(A) + P(A^c) = 1$, aquí, A^c denota el complemento de *A*.

- Regla aditiva.

Si *A* y *B* son dos eventos, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Si *A*, *B* y *C* son tres eventos cualesquiera de un espacio muestral *S*, entonces $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

- Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \le P(B)$

- Regla multiplicativa.

Si *A* y *B* son dos eventos, entonces $P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$. Si *A*, *B* y *C* son tres eventos cualesquiera de un espacio muestral *S*, entonces $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B/A)P(C/A \cap B)$.

- Regla de probabilidad total (para dos eventos).

Para cualesquiera eventos *A* y *B*,

$P(A' \cap B') = 1 + P(A \cup B)$

$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A') = P(B/A)P(A) + P(B/A')P(A')$.

- Regla de probabilidad total (para eventos múltiples).

Suponga que E_1, E_2, … E_k son *k* conjuntos mutuamente excluyentes y exhaustivos. Entonces

$P(B) = P(B \cap E_1) + P(B \cap E_2) + ... + P(B \cap E_k)$

$P(B) = P(B/E_1)P(E_1) + P(B/E_2)P(E_2) + ... + P(B/E_k)P(E_k)$

Eventos independientes.

A y *B* son independientes si y sólo si se cumple la relación $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

4.- Probabilidad condicional.

La **probabilidad condicional** de un evento *B* dado un evento *A*, denotada como $P(B/A)$, es

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad\qquad P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)}$$

5.- Teorema de Bayes.

Si E_1, E_2, … E_k son *k* eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos y B es un evento cualquiera, entonces

$$P(E_1/B) = \frac{P(B/E_1)P(E_1)}{P(B/E_1)P(E_1) + P(B/E_2)P(E_2) + ... + P(B/E_k)P(E_k)}$$

$$P(E_r/B) = \frac{P(B/E_r)P(E_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B/E_i)P(E_i)}$$

6.- Técnicas básicas de conteo.

6.1.- Principio multiplicativo.

Si una operación consiste de *n* pasos distintos y otra de *m* pasos distintos, y si ambos no son excluyentes, sino que pueden realizarse juntas o en sucesión, entonces el número total de pasos distintos (o maneras) en que pueden realizarse ambas operaciones es $m.n$. En general, si algo puede hacerse de n_1 maneras diferentes, y luego de ello se puede hacer una segunda cosa en n_2 maneras distintas, …, y finalmente se puede hacer una *k*-ésima en n_k formas diferentes, entonces todas las *k* cosas pueden llevarse a cabo en un orden específico en $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$ formas diferentes.

6.2.- Principio aditivo.

Bajo las mismas premisas que en el principio anterior, si las dos operaciones en cuestión no pueden hacerse juntas ni en sucesión, por tratarse de operaciones mutuamente excluyentes, entonces el número total de maneras en las que se pueden realizar ambas es *m* + *n*.

6.3.- Diagrama de árbol.

Un diagrama de árbol es un esquema utilizado para enumerar todas las apariciones posibles de una secuencia de experimentos o sucesos, donde cada suceso puede ocurrir de un número infinito de maneras.

7.- Teoría combinatoria.

7.1.- Factorial de un entero no negativo.

En análisis combinatorio interviene con mucha frecuencia el concepto de **factorial** de un entero no negativo *n*. Se denota por el símbolo $n!$ y se define como el producto de *n* por todos los enteros que le preceden hasta llegar al uno. La excepción es el caso de $0!$, el cual conviene definirlo como igual a1 con el objeto de preservar la validez de las fórmulas en casos extremos. No es posible *demostrar* que cero factorial es igual a uno, ya que las definiciones no se demuestran.

Simbólicamente todo esto queda expresado como $n! = n(n-1)(n-2)...3.2.1$ para $n \geq 1$; y $0! = 1$ por definición.

7.2.- Aproximación de Stirling a n!

Cuando *n* es grande, no es práctica la evaluación directa de *n*!. En tales casos se puede usar la siguiente fórmula de aproximación

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

7.3.- Permutaciones.

Una **permutación** (también llamada ordenación o variación) es una arreglo de todos o parte de un número de objetos, en un orden definido y sin repetirlos.

Existen muchas nomenclaturas diferentes para denotar las permutaciones de *n* objetos tomando *r* de ellos a la vez (obviamente $n \leq r$). La notación más común es ${}_nP_r$. Otras notaciones usuales son las siguientes: $P\,(n,r)$; P_n^r; V_n^r. En el caso de que $r = n$, es decir, que se trate de permutaciones de *n* objetos tomando todos ellos a la vez, se acostumbra simplificar la notación y sólo se escribe P_n en lugar de ${}_nP_n$.

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

7.4.- Permutaciones cíclicas.

Las permutaciones que ocurren cuando se ordenan objetos en una curva cerrada (por ejemplo, una mesa redonda, un llavero, la rueda de la fortuna, etc) se denominan **pemutaciones cíclicas** (o **circulares**). Dos permutaciones cíclicas no se consideran distintas si objetos correspondientes de los dos arreglos van precedidos y seguidos de los mismos objetos a medida que avanzamos en el sentido que giran las manecillas del reloj.

El número de permutaciones cíclicas de *n* objetos distintos tomados todos a la vez es de $(n-1)!$

7.5.- Objetos indistinguibles.

En ocasiones estamos interesados en permutar ciertos objetos de los cuales hay algunos que, si bien son diferentes objetivamente hablando, para fines prácticos los consideramos como si fuesen iguales o idénticos. Este tipo de objetos se llaman *indistinguibles*. Ejemplos típicos de objetos que consideramos como indistinguibles en la práctica son: 1) los carros del supermercado; las monedas del mismo valor o denominación, los distintos ejemplares de un mismo libro de una biblioteca; las letras repetidas de alguna palabra, etc. Lo que tienen en común los objetos indistinguibles es que no nos preocupa ni nos interesa si nos cambian uno por otro del mismo tipo; para el caso es igual.

7.6.- Permutaciones con algunos objetos indistinguibles.

El número de permutaciones distinguibles de *n* objetos de los cuales n_1 son de un tipo, n_2 son de un segundo tipo, …, n_k son de un *k*-ésimo tipo, y $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ es

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!.n_2!\ldots n_k!}$$

8.- Particiones de un conjunto.

Una combinación de *r* objetos seleccionados de un conjunto de *n* objetos distintos puede considerarse una **partición** de los *n* objetos en dos subconjuntos que contienen, respectivamente, los *r* objetos que se seleccionan y nos $(n - r)$ objetos que se dejan. A menudo, nos concierne el problema más general de dividir un conjunto de *n* objetos distintos en *k* subconjuntos, lo que requiere que cada uno de los *n* objetos pertenezca a uno y sólo uno de los subconjuntos. El orden de los objetos dentro de un subconjunto no es de importancia.

El número de maneras de dividir o partir un conjunto de *n* objetos distintos en *k* subconjuntos con n_1 objetos en el primer subconjunto, n_2 objetos en el segundo, …, y n_k en el *k*-ésimo subconjunto, es

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!.n_2!\ldots n_k!}$$

9.- Ensayos sin reposición.

Suponga que se tiene una población de *N* objetos que son de sólo *t* tipos diferentes denotados por tipo 1, tipo 2, …, tipo *t*. Suponga, además, que se escoge de allí una muestra de tamaño *n* sin reposición. Si en la población hay k_1 objetos del tipo 1, …, hasta k_t objetos del tipo *t*, entonces la probabilidad de que en la muestra haya exactamente x_1 objetos del tipo 1; x_2 objetos del tipo 2, …, hasta x_t objetos del tipo *t*, viene dada por la expresión siguiente:

$$P = \frac{\binom{k_1}{x_1}\binom{k_2}{x_2}\ldots\binom{k_t}{x_t}}{\binom{N}{n}}, \text{ donde } \sum_{i=1}^{t} x_i = n \text{ y } \sum_{i=1}^{t} k_i = N$$

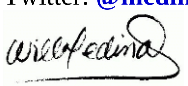
10.- Combinaciones.

Las **combinaciones** de *n* objetos (o cosas) tomando *r* de ellos a la vez representan el número de subconjuntos diferentes de tamaño *r* que se pueden hacer con esos *n* objetos. A diferencia de lo que ocurre con las permutaciones, en las combinaciones el orden de aparición de los objetos es irrelevante.

Notaciones usuales para combinaciones de *n* en *r*: $\binom{n}{r}$, $C\,(n,r)$, ${}_nC_r$, C_n^r y otras más por el estilo.

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**.
Teléfono / WhatsApp: **+58-424-9744352**
e-mail: **medinawj@gmail.com**
Twitter: **@medinawj**



El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección: **https://www.tutoruniversitario.com/**

Puerto La Cruz, abril de 2025.