LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

1.- Definición de la transformada de Laplace.

$L\{f(t)\} = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st} f(t)dt$ $\qquad F(s) = L\{f(t)\}$

2.- Linealidad de la transformada de Laplace.

La transformada de Laplace es una operación lineal, esto es, para funciones dadas $f(t)$ y $g(t)$ para las cuales la transformada de Laplace existe y constantes dadas a y b, se tiene
$L\{a f(t) + b g(t)\} = a L\{f(t)\} + b L\{g(t)\}$

3.- Funciones elementales y sus transformadas de Laplace.

$f(t)$	$L\{f(t)\}$	$f(t)$	$L\{f(t)\}$	$f(t)$	$L\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cosh\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\operatorname{senh}\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
t^2	$\frac{2!}{s^3}$	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$t\cosh\omega t$	$\frac{s^2+\omega^2}{(s^2-\omega^2)^2}$
t^n $(n = 1, 2,\ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$t\operatorname{senh}\omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2-\omega^2)^2}$
t^a $(a>0)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\cosh\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$e^{at}\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\operatorname{senh}\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2-\omega^2}$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$te^{at}\cos\omega t$	$\frac{(s-a)^2-\omega^2}{[(s-a)^2+\omega^2]^2}$	$te^{at}\cosh\omega t$	$\frac{(s-a)^2+\omega^2}{[(s-a)^2-\omega^2]^2}$
t^ne^{at}	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$te^{at}\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{2\omega(s-a)}{[(s-a)^2+\omega^2]^2}$	$te^{at}\operatorname{senh}\omega t$	$\frac{2\omega(s-a)}{[(s-a)^2-\omega^2]^2}$

4.- La transformada inversa.

$f(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $F(s)$: $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$

5.- Linealidad de la transformada inversa de Laplace.

La transformada inversa de Laplace es una operación lineal, esto es, para funciones dadas $F(s)$ y $G(s)$ para las cuales la transformada inversa de Laplace existe y constantes dadas a y b, se tiene $L^{-1}\{a F(s) + b G(s)\} = a L^{-1}\{F(s)\} + b L^{-1}\{G(s)\}$
$L^{-1}\{a F(s) + b G(s)\} = a f(t) + b g(t)$

6.- Condición necesaria para que una función $F(s)$ sea la transformada de Laplace de una función $f(t)$.

$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$. Si $\lim_{s\to\infty} F(s) \neq 0$, entonces $L^{-1}\{F(s)\}$ no existe.

7.- Primer teorema de traslación.

Si $F(s) = L\{f(t)\}$ y a es cualquier número real,

$L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$ $\qquad L\{e^{at} f(t)\} = L\{f(t)\}\big|_{s\to s-a}$

8.- Escalamiento.

$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

9.- Tabla de algunas transformadas inversas de Laplace.

$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s-\alpha)^2(s^2+\omega^2)}$	$\frac{[\omega(\alpha^2+\omega^2)t-2\alpha\omega]e^{\alpha t}+2\alpha\omega\cos\omega t+(\alpha^2-\omega^2)\operatorname{sen}\omega t}{\omega(\alpha^2+\omega^2)^2}$
$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{s}{(s-\alpha)^2(s^2+\omega^2)}$	$\frac{[-\alpha(\alpha^2+\omega^2)t+(\alpha^2-\omega^2)]e^{\alpha t}+(\alpha^2-\omega^2)\cos\omega t-2\alpha\omega\operatorname{sen}\omega t}{(\alpha^2+\omega^2)^2}$
$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{2}{\sqrt{t/\pi}}$	$\frac{s^2}{(s-\alpha)^2(s^2+\omega^2)}$	$\frac{[\alpha^2(\alpha^2+\omega^2)t+2\alpha\omega^2]e^{\alpha t}-2\alpha\omega^2\cos\omega t-\omega(\alpha^2-\omega^2)\operatorname{sen}\omega t}{(\alpha^2+\omega^2)^2}$
$\frac{1}{s^a}$	$\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}$	$\frac{s^3}{(s-\alpha)^2(s^2+\omega^2)}$	$\frac{[-\alpha^3(\alpha^2+\omega^2)t-\alpha^2(\alpha^2+3\omega^2)]e^{\alpha t}-\omega^2(\alpha^2-\omega^2)\cos\omega t+2\alpha\omega^3\operatorname{sen}\omega t}{(\alpha^2+\omega^2)^2}$
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$	$\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3}(\operatorname{sen}\omega t-\omega t\cos\omega t)$
$\frac{1}{(s-a)^k}$	$\frac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{t}{2\omega}\operatorname{sen}\omega t$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{(a-b)}(e^{at}-e^{bt})$	$\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega}(\operatorname{sen}\omega t+\omega t\cos\omega t)$
$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{(a-b)}(ae^{at}-be^{bt})$	$\frac{s^3}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\cos\omega t-\frac{1}{2}\omega t\operatorname{sen}\omega t$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$-\frac{(b-c)e^{at}+(c-a)e^{bt}+(a-b)e^{ct}}{(b-c)(c-a)(a-b)}$	$\frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\frac{1}{ab(a^2-b^2)}(-b\operatorname{sen}at+a\operatorname{sen}bt)$
$\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$-\frac{(b-c)ae^{at}+(c-a)be^{bt}+(a-b)ce^{ct}}{(b-c)(c-a)(a-b)}$	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\frac{1}{a^2-b^2}(-\cos at+\cos bt)$
$\frac{s^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$-\frac{(b-c)a^2e^{at}+(c-a)b^2e^{bt}+(a-b)c^2e^{ct}}{(b-c)(c-a)(a-b)}$	$\frac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\frac{1}{a^2-b^2}(a\operatorname{sen}at-b\operatorname{sen}bt)$
$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$	$\frac{s^3}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\frac{1}{a^2-b^2}(a^2\cos at-b^2\cos bt)$
$\frac{1}{(s-\alpha)(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\left(e^{\alpha t}-\cos\omega t-\frac{\alpha}{\omega}\operatorname{sen}\omega t\right)$	$\frac{1}{s^4+4\omega^4}$	$\frac{1}{4\omega^3}(\cosh\omega t\operatorname{sen}\omega t-\operatorname{senh}\omega t\cos\omega t)$
$\frac{s}{(s-\alpha)(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}(\alpha e^{at}-\alpha\cos\omega t+\omega\operatorname{sen}\omega t)$	$\frac{s}{s^4+4\omega^4}$	$\frac{1}{2\omega}(\cosh\omega t\operatorname{sen}\omega t+\operatorname{senh}\omega t\cos\omega t)$
$\frac{s^2}{(s-\alpha)(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}(\alpha^2e^{\alpha t}+\omega^2\cos\omega t+\alpha\omega\operatorname{sen}\omega t)$	$\frac{s^2}{s^4+4\omega^4}$	$\frac{1}{2\omega^2}\operatorname{senh}\omega t\operatorname{sen}\omega t$
$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^3}(\omega t-\operatorname{sen}\omega t)$	$\frac{s^3}{s^4+4\omega^4}$	$\cosh\omega t\cos\omega t$

10.- Fracciones simples.

La separación en fracciones simples resulta útil para determinar la transformada inversa de Laplace.

Descomposición de $\frac{N(s)}{D(s)}$ en fracciones simples.

El procedimiento siguiente es aplicable sólo a fracciones racionales propias [esto es, si el grado de $D(s)$ es mayor que el de $N(s)$].

Descomponer completamente $D(s)$ en factores de la forma $(ps + q)^n$, $(s^2 + a^2)^n$ y $[(s \pm b)^2 + a^2)]^n$.

Regla 1. Factores lineales que no se repiten.

Por cada factor de la forma $p_i\,s + q_i$ la descomposición en fracciones simples ha de incluir la siguiente suma de n fracciones:

$$\frac{N_1(s)}{(p_1 s+q_1)(p_2 s+q_2)\ldots(p_n s+q_n)}=\frac{A_1}{p_1 s+q_1}+\frac{A_2}{p_2 s+q_2}+\ldots+\frac{A_3}{p_n s+q_n}$$

Regla 2. Factores lineales que se repiten.

Por cada factor de la forma $(p\,s + q)^n$ la descomposición en fracciones simples ha de incluir la siguiente suma de n fracciones:

$$\frac{N_1(x)}{(p\,s+q)^n}=\frac{A_1}{p\,s+q}+\frac{A_2}{(p\,s+q)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(p\,s+q)^n}$$

Regla 3. Factores cuadráticos que no se repiten.

Por cada factor de la forma $s^2 + a_i^2$ y $(s \pm b_i)^2 + a_i^2$ la descomposición en fracciones simples ha de incluir la suma de las siguientes fracciones:

$$\frac{N_1(s)}{(s^2+a_1^2)(s^2+a_2^2)\ldots(s^2+a_n^2)}=\frac{B_1 s+C_1}{s^2+a_1^2}+\frac{B_2 s+C_2}{s^2+a_2^2}+\ldots+\frac{B_n s+C_n}{s^2+a_n^2}$$

$$\frac{N_1(s)}{[(s\pm b_1)^2+a_1^2][(s\pm b_2)^2+a_2^2]\ldots[(s\pm b_n)^2+a_n^2]}=\frac{B_1(s\pm b_1)+C_1}{(s\pm b_1)^2+a_1^2}+\frac{B_2(s\pm b_2)+C_2}{(s\pm b_2)^2+a_2^2}+\ldots+\frac{B_n(s\pm b_n)+C_n}{(s\pm b_n)^2+a_n^2}$$

Regla 4. Factores cuadráticos repetidos.

Por cada factor de la forma $(s^2 + a^2)^n$ y $[(s \pm b)^2 + a^2)]^n$ la descomposición en fracciones simples ha de incluir la suma de las siguientes fracciones:

$$\frac{N_1(s)}{(s^2+a^2)^n}=\frac{B_1 s+C_1}{s^2+a^2}+\frac{B_2 s+C_2}{(s^2+a^2)^2}+\ldots+\frac{B_n s+C_n}{(s^2+a^2)^n}$$

$$\frac{N_1(s)}{[(s\pm b)^2+a^2]^n}=\frac{B_1(s\pm b)+C_1}{(s\pm b)^2+a^2}+\frac{B_2(s\pm b)+C_2}{[(s\pm b)^2+a^2]^2}+\ldots+\frac{B_n(s\pm b)+C_n}{[(s\pm b)^2+a^2]^n}$$

10.1.- Esquema para resolver la ecuación fundamental.

Factores lineales.

1.- Sustituir en s las raíces de los distintos factores lineales que aparecen en la ecuación fundamental.

2.- Si hay factores lineales repetidos, usar los coeficientes ya determinados en la parte 1 para reescribir la ecuación fundamental. A continuación sustituir en s *otros* valores.

Factores cuadráticos.

1.- Desarrollar la ecuación fundamental.

2.- Agrupar términos según las potencias de s.

3.- Igualar los coeficientes de las potencias correspondientes de s, obteniendo así un sistema de ecuaciones lineales (Aplicación del Método de los Coeficientes Indeterminados).

4.- Resolver el sistema lineal.

Nota: Pueden utilizarse números complejos para descomponer factores cuadráticos y obtener las constantes mediante sustitución, como en el caso de factores lineales.

11.- La función escalón unitaria.

La función $U(t-a)$ se define como sigue $U(t-a)=\begin{cases}0, & 0\le t<a\\ 1, & t>a\end{cases}$

11.1.- Funciones ramificadas en función de escalones unitarios.

$$f(t)=\begin{cases}g(t), & 0\le t<a\\ h(t), & t>a\end{cases}\qquad f(t) = g(t) + [h(t) - g(t)]\,U(t - a)$$

$$f(t) = g(t)\,[U(t - 0) - U(t - a)] + h(t)\,U(t - a)$$

$$f(t)=\begin{cases}g(t), & 0\le t<a\\ h(t), & a\le t<b\\ j(t), & t\ge b\end{cases}\qquad f(t) = g(t) + [h(t) - g(t)]\,U(t - a) + [j(t) - h(t)]\,U(t - b)$$

$$f(t) = g(t)\,[U(t - 0) - U(t - a)] + h(t)\,[U(t - a) - U(t - b)] + j(t)\,U(t - b)$$

12.- Segundo teorema de traslación.

Si $F(s) = L\{f(t)\}$ y $a > 0$, entonces $L\{f(t - a)\,U(t - a)\} = e^{-a s}F(s)$

Forma alternativa: $L\{f(t)\,U(t - a)\} = e^{-a s}\,L\{f(t + a)\}$

Fórmula útil para la transformada inversa con exponenciales en función de "s":

$$L^{-1}\{F(s)\,e^{-a s}\}=L^{-1}\{F(s)\}\,\Big|_{t\to t-a}\times U(t-a)$$

13.- Diferenciación de transformadas de Laplace.

$$L\{t\,f(t)\}=-F'(s)\qquad L\{t\,f(t)\}=-\frac{d}{d\,s}F(s)$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=-\frac{1}{t}L^{-1}\{F'(s)\}\qquad L^{-1}\{F(s)\}=-\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{d}{d\,s}F(s)\right\}$$

Si $F(s)=L\{f(t)\}$ y $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces $L\{t^n\,f(t)\}=(-1)^n\dfrac{d^nF(s)}{d\,s^n}$

14.- Transformada de Laplace de derivadas.

14.1.- Primera derivada.

$$L\{f'(t)\}=s\,L\{f(t)\}-f(0)\qquad L\{f'(t)\}=s\,Y(s)-y(0)\qquad L\{f'(t)\}=s\,Y-y(0)$$

14.2.- Segunda derivada.

$$L\{f''(t)\}=s\,L\{f'(t)\}-f'(0)\qquad L\{f''(t)\}=s[s\,Y-y(0)]-y'(0)$$

$$L\{f''(t)\}=s^2Y-s\,y(0)-y'(0)$$

14.3.- Tercera derivada.

$$L\{f'''(t)\}=s\,L\{f''(t)\}-f''(0)\qquad L\{f'''(t)\}=s[s^2Y-s\,y(0)-y'(0)]-y''(0)$$

$$L\{f'''(t)\}=s^3\,Y-s^2\,y(0)-s\,y'(0)-y''(0)$$

15.- Transformada de Laplace de Integrales.

$$L\{\textstyle\int_0^t f(\tau)\,d\tau\}=\frac{1}{s}L\{f(t)\}\qquad L\{\textstyle\int_0^t f(\tau)\,d\tau\}=\frac{1}{s}F(s)\qquad L^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\}=\textstyle\int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

16.- Convolución.

$$L\{\textstyle\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\,\tau\}=L\{f(t)\}L\{g(t)\}$$

$$L\{\textstyle\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\,\tau\}=F(s)\,G(s)$$

$$L^{-1}\{F(s)\,G(s)\}=\textstyle\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\,\tau$$

17.- Transformadas de Laplace de funciones periódicas.

La transformada de Laplace de una función periódica continua $f(t)$ de periodo T es:

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$$

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**.
Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**
e-mail: **medinawj@gmail.com**
Twitter: **@medinawj**

El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:
https://www.tutoruniversitario.com/ Maturín, diciembre de 2024.