ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN.

1.- Ecuación diferencial. Si una ecuación contiene las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial.

2.- Tipos de ecuaciones diferenciales.

2.1.- Ecuación diferencial ordinaria: Si una ecuación contiene sólo derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a **una sola variable independiente**, entonces se dice que es una ecuación diferencial ordinaria.

2.2.- Ecuación diferencial parcial: Una ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama ecuación diferencial parcial.

3.- Orden de una ecuación diferencial. El orden de la más alta derivada en una ecuación diferencial se llama orden de la ecuación.

4.- Grado de una ecuación diferencial. El grado de una ecuación diferencial es la potencia más alta a la que está elevada la derivada de mayor orden (siempre que la ecuación esté escrita en forma polinómica en cuanto a las derivadas y a la variable dependiente).

5.- Linealidad de una ecuación diferencial. Se dice que la ecuación diferencial es lineal si tiene la forma $a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)\,y=F(x)$

Las ecuaciones diferenciales lineales se caracterizan por dos propiedades: a) la variable dependiente "y" junto con todas sus derivadas son de primer grado, esto es, la potencia de cada término en "y" y sus derivadas es 1; y b) cada coeficiente depende sólo de la variable independiente "x". Una ecuación que no es lineal se dice no lineal.

6.- Solución de una ecuación diferencial. Se dice que una función f cualquiera, definida en algún intervalo I, es solución de una ecuación diferencial en el intervalo, si sustituida en dicha ecuación la reduce a una identidad.

6.1.- Solución trivial. A una solución de una ecuación diferencial que es idéntica a cero en un intervalo I, se le denomina a menudo solución trivial.

6.2.- Solución general. Una solución que contiene una o más constantes arbitrarias, se denomina solución general de una ecuación diferencial dada.

6.3.- Solución particular. Una solución particular de una ecuación diferencial es toda solución obtenida asignando valores específicos a las constantes que intervienen en la solución general (El valor de la constante se obtiene a través de condiciones iniciales).

6.4.- Solución singular. Solución que no es posible obtener a partir de la solución general asignando valores a las constantes arbitrarias.

6.5.- Solución explícita. Una solución explícita de una ecuación diferencial es una función de la forma $y = f(x)$ ó $x = f(y)$.

6.6.- Solución implícita. Se dice que una relación $F(x, y) = C$ (C es una constante arbitraria) define implícitamente una ecuación diferencial en un intervalo I, si define una o más soluciones explícitas en I.

7.- Variables separables. Se dice que una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)}{h(y)}$ es separable o que tiene variables separables.

7.1.- Separación de variables. Se dice que una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx}=F(x,y)$ es separable o que tiene variables separables si la función $F(x, y)$ se puede escribir como el producto de una función de "x" y una función de "y". Es decir: $\frac{dy}{dx}=g(x)h(y)$. Si la ecuación de primer orden $\frac{dy}{dx}=F(x,y)$ puede escribirse con *variables separadas* en la forma diferencial $h(y)\,dy = g(x)\,dx$ siendo h y g continuas, entonces la solución general es $\int h(y)\,dy=\int g(x)\,dx$ siendo C una constante arbitraria.

Una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$, $b \neq 0$, puede reducirse siempre a una ecuación de variables separables por medio de la sustitución $u = a x + b y + c$.

8.- Funciones homogéneas.

8.1- Definición de función homogénea. Se dice que $f(x, y)$ es una función homogénea de grado n, si para algún número real n, $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.

8.2.- Ecuaciones diferenciales homogéneas. Si una ecuación en la forma diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ tiene la propiedad que $M(tx, ty) = t^n M(x, y)$. y $N(tx, ty) = t^n N(x, y)$. se dice que tiene coeficientes homogéneos o que es una ecuación homogénea.

8.3.- Paso de una ecuación diferencial homogénea a una de variables separables.

1.- Si f es homogénea de grado cero, la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ puede ser transformada en una ecuación cuyas variables son separables haciendo $u=\frac{y}{x}$. Tendremos $y = u\,x$ y $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$. La ecuación diferencial se reduce a $\frac{dx}{x}+\frac{du}{u-f(u)}=0$

2.- Si tanto M como N son homogéneas del mismo grado, la ecuación diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ puede transformarse en una ecuación cuyas variables son separables, haciendo $u=\frac{y}{x}$. Se tendrá $y = u\,x$ y $dy = u\,dx + x\,du$. Si $M(x, y)$ es de estructura más simple que $N(x, y)$ se ensaya $v=\frac{x}{y}$. Se tendrá $x = v\,y$ y $dx = v\,dy + y\,dv$.

Ecuaciones diferenciales con coeficientes lineales. Una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)$ ó $(a\,x + b\,y + c)\,dx + (A\,x + B\,y + C)\,dy = 0$, $a\,B - b\,A \neq 0$, siempre puede ser reducida a una ecuación homogénea mediante las sustituciones $x = u + h$, $y = v + k$, donde h y k son la solución del sistema de ecuaciones: $a\,x + b\,y + c = 0$ $\quad$ $A\,x + B\,y + C = 0$

En cuanto al sistema de ecuaciones anterior, se presentan los siguientes casos:

- **Rectas coincidentes** (Se intersectan en todos sus puntos): $\frac{a}{b}=\frac{A}{B}$

Método de solución: Escríbase la expresión $A\,x + B\,y + C$. como un múltiplo de $a\,x + b\,y + c$ en la ecuación diferencial. Simplifique. La ecuación resultante es de variables separables en x y y.

- **Rectas paralelas** (No se intersectan): $\frac{a}{b}=\frac{A}{B}$

Método de solución: Tómese $u = a\,x + b\,y$, con lo cual $du = a\,dx + b\,dy$. Escríbase la ecuación diferencial en función de las dos variables x y u ó y y u. La ecuación resultante es de variables separables.

- **Rectas que se intersectan en el punto** (h,k): $\frac{a}{b}\neq\frac{A}{B}$

Método de solución: Tómese $x = u + h$ y $y = v + k$, con lo cual $dx = du$ y $dy = dv$. Escríbase la ecuación diferencial en función de las nuevas variables u y v. La ecuación resultante es homogénea.

9.- Diferenciales exactas.

9.1.- Ecuaciones diferenciales exactas. La ecuación diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es exacta si existe una función $U(x, y)$ tal que la diferencial total de U está dada por $dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy$

9.2.- Criterio de exactitud. La ecuación diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es exacta si $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

9.3.- Solución general de una ecuación exacta. Si la ecuación diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es exacta, la solución general viene entonces dada por $U(x, y) = C$ siendo

$U(x,y)=\int M(x,y)\,dx+f(y)$ y $N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\,dx\right]=f'(y)$. [Adviértase que $\int M(x,y)\,dx$ denota integración parcial con respecto a x].

9.4.- Factores integrantes. Si la ecuación diferencial $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ no es exacta, puede ser posible convertirla en exacta multiplicándola por una función adecuada $F(x,y)$. Una tal función recibe el nombre de factor integrante de la ecuación diferencial.
$F(x,y)\,M(x,y)\,dx+F(x,y)\,N(x,y)\,dy=0$ es exacta.

9.5.- Factores integrantes que son función sólo de x, de y, de $x+y$ ó de $x\,.\,y$. Sea la ecuación diferencial $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$.

i.- Si $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\mu(x)$ entonces $e^{\int\mu(x)\,dx}$ es un factor integrante.

ii.- Si $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\mu(y)$ entonces $e^{\int\mu(y)\,dy}$ es un factor integrante.

iii.- Si $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M-N}=\mu(x+y)$ entonces $z=x+y$ y $e^{\int\mu(z)\,dz}$ es un factor integrante.

iv.- Si $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny}=\mu(x.y)$ entonces $z=x\,y$ y $e^{\int\mu(z)\,dz}$ es un factor integrante.

9.6.- Trece diferenciales exactas usuales (Factores integrantes por inspección).

i.- $y\,dx+x\,dy=d(xy)$

ii.- $x^{m-1}y^{n-1}(m\,y\,dx+n\,x\,dy)=d(x^m y^n)$

iii. $\frac{x\,dy+y\,dx}{xy}=d\left[\ln(xy)\right]$

iv. $\frac{x\,dy+y\,dx}{(xy)^n}=d\left[\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right]$

v.- $\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}=d\left[\ln\sqrt{x^2+y^2}\right]$

vi. $\frac{x\,dx+y\,dy}{(x^2+y^2)^n}=d\left[\frac{-1}{2(n-1)(x^2+y^2)^{n-1}}\right]$

vii.- $\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=d\left(\frac{y}{x}\right)$

viii. $\frac{x\,dy-y\,dx}{xy}=d\left[\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right]$

ix.- $\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=d\left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right]$

x.- $\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}=d\left(\frac{x}{y}\right)$

xi.- $\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}=d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

xii.- $\frac{x\,dx-y\,dy}{\sqrt{x^2-y^2}}=d\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)$

xiii.- $\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2-y^2}=d\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\right]$

9.7.- Otros factores integrantes.

i.- Si $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ es homogénea y $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy\neq 0$, entonces $\frac{1}{x\,M(x,y)+y\,N(x,y)}$ es un factor integrante.

ii.- Si $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ se puede escribir en la forma $y\,f(x,y)\,dx+x\,g(x,y)\,dy=0$, donde $f(x,y)\neq g(x,y)$, entonces $\frac{1}{x\,M(x,y)-y\,N(x,y)}$ es un factor integrante.

iii.- La ecuación $x^r y^s(m\,y\,dx+n\,x\,dy)+x^\rho y^\sigma(\mu\,y\,dx+\nu\,x\,dy)=0$ donde r, s, m, n, ρ, σ, μ y ν son constantes y $m\,\nu-n\,\mu\neq 0$ tiene un factor integrante de la forma $x^\alpha y^\beta$. El método de solución consiste en determinar α y β.

10.- Ecuaciones diferenciales lineales.

10.1- Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Una ecuación de la forma $A(x)\frac{dy}{dx}+B(x)\,y=C(x)$ recibe el nombre de ecuación diferencial lineal de primer orden. La forma normal de esta ecuación es $\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x)$. La ecuación diferencial $\frac{dx}{dy}+R(y)\,x=S(y)$ es *lineal en x*.

10.2.- Solución general de una ecuación diferencial lineal de primer orden. La solución general de una ecuación diferencial lineal de primer orden $\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x)$ viene dada por

$$y\,e^{\int P(x)\,dx}=\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx+C$$

Métodos de solución.

a) **Método de Lagrange**, haciendo variar la constante "C" de la solución homogénea correspondiente de la ecuación diferencial inicial, es decir $y(x)=C(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}$ y sustituirla en la ecuación diferencial inicial.

b) **Método de Bernoulli**, haciendo la sustitución de $y=u\,v$, donde "u" y "v" son dos funciones de "x" desconocidas.

$$u(x)=\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx+C\,;\;v(x)=e^{-\int P(x)\,dx}$$

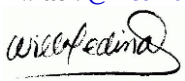
11.- Ecuación de Bernoulli. Una ecuación no lineal muy conocida, que se reduce a una lineal por medio de una sustitución apropiada, es la ecuación de Bernoulli $y'+P(x)\,y=Q(x)\,y^n$. Nótese que esta ecuación es lineal si $n=0$ y admite variables separadas si $n=1$. La solución de la ecuación de Bernoulli es $y^{1-n}e^{\int(1-n)P(x)\,dx}=\int(1-n)\,Q(x)\,e^{\int(1-n)P(x)\,dx}\,dx+C$

12.- Sustituciones. Para una ecuación de la forma $y\,f(x,y)\,dx+x\,g(x,y)\,dy=0$, la sustitución $x\,y=z$, $y=\frac{z}{x}$, $dy=\frac{x\,dz-z\,dx}{x^2}$ reduce una ecuación de este tipo a la forma $P(x,z)\,dx+Q(x,z)\,dz=0$ en la que las variables son separables.

13.- Ecuación de Ricatti. Es una ecuación no lineal $\frac{dy}{dx}=P(x)+Q(x)\,y+R(x)\,y^2$. Si y_1 es una solución particular conocida de la ecuación de Ricatti, $y=y_1+u$ es una familia de soluciones de dicha ecuación.

14.- Ecuación de Clairaut. La ecuación diferencial $y=x\,y'+f(y')$ se llama ecuación de Clairaut. Una solución de la ecuación de Clairaut es la familia de rectas $y=c\,x+f(c)$, en donde c es una constante arbitraria.

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**.
Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**
e-mail: **medinawj@gmail.com**
Twitter: **@medinawj**



El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:
https://www.tutoruniversitario.com/ Maturín, diciembre de 2024.