# SISTEMA DE COORDENADAS CURVILÍNEAS.

Hasta ahora sólo se han considerado coordenadas rectangulares $x$, $y$ y $z$. Sin embargo, en muchos casos es más lógico utilizar coordenadas curvilíneas. Solamente consideraremos sistemas coordenados ortogonales, es decir, aquellos en los que las tres familias de superficies coordenadas son perpendiculares entre sí.

## Sistema de Coordenadas Polares.

El sistema de coordenadas polares determina un punto del plano mediante su distancia $r$ a un punto fijo (el polo) y el ángulo $\theta$ que forma la recta que pasa por el punto y el polo con una recta fija (el eje polar). Las coordenadas polares de un punto se denotan como $(r,\theta)$.

### 1.- Multiplicidad de la representación por coordenadas polares.

El punto $(r, \theta)$ se representa también por $(r, \theta + 2n\pi)$ o por $(-r, \theta + (2n+1)\pi)$, donde $n$ es un entero. Además, el polo es representado por $(r, \theta)$ para cualquier ángulo $\theta$.

### 2.- Conversión de polares a rectangulares.

Dado un punto en coordenadas polares $(r, \theta)$, sus coordenadas rectangulares $(x, y)$ vienen determinadas por:

$x = r\cos\theta$ $\qquad\qquad$ $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

### 3.- Conversión de rectangulares a polares.

Para pasar de las coordenadas $(x, y)$ a $(r, \theta)$, han de usarse las ecuaciones:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad\qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \qquad\qquad x \neq 0.$$

Para valores de $\theta$ correspondientes al mismo cuadrante que $(x, y)$, el valor de $r$ ha de tomarse positivo. Si $\theta$ corresponde al cuadrante opuesto del de $(x, y)$, el valor de $r$ ha de tomarse negativo.

Mediante las ecuaciones que relacionan las coordenadas polares y rectangulares podemos también convertir ecuaciones en un sistema de coordenadas a ecuaciones en el otro sistema.

### 4.- Gráficas de ecuaciones en coordenadas polares.

#### 4.1.- Criterios de simetría en coordenadas polares.

El gráfico de una ecuación en polares es simétrico respecto de:

1.- La recta $\theta = \pi/2$ si al sustituir $(r, \theta)$ por $(r, \pi - \theta)$ o $(-r, -\theta)$ la ecuación permanece invariable.

2.- El eje polar si al sustituir $(r, \theta)$ por $(r, -\theta)$, o $(-r, \pi - \theta)$ la ecuación permanece invariable.

3.- El polo si al sustituir $(r, \theta)$ por $(r, \pi + \theta)$, o $(-r, \theta)$ la ecuación permanece invariable.

#### 4.2.- Simetría de $r = f(\mathrm{sen}\,\theta)$ y $r = g(\cos\theta)$.

1.- Si $r$ es función de sen $\theta$, su gráfico es simétrico respecto de la recta $\theta = \pi/2$.

2.- Si $r$ es función de cos $\theta$, su gráfico es simétrico respecto del eje polar.

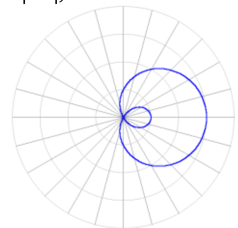
#### 4.3.- Curvas especiales en coordenadas polares.

**1**.- Los gráficos de ecuaciones de la forma $r = a + b\cos\theta$ ó $r = a + b\,\mathrm{sen}\,\theta$ se denominan caracoles. Además:

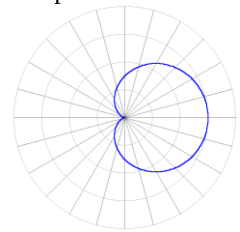
Si $|a| < |b|$, el caracol tiene dos lazos.

Si $|a| = |b|$, el caracol tiene forma de corazón y se denomina cardioide.

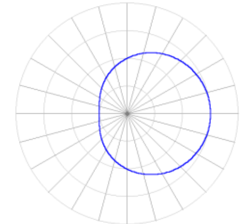
Si $|a| > |b|$, el caracol tiene un lazo aplastado.



$r = 1 + 2\cos\theta$



$r = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos\theta$

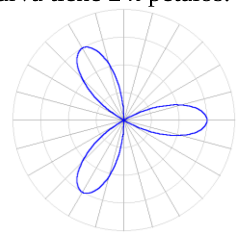


$r = 2 + \cos\theta$

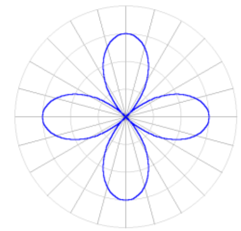
**2**.- Los gráficos de ecuaciones de la forma $r = a\cos(n\theta)$ ó $r = a\,\mathrm{sen}(n\theta)$ $(n \geq 2)$ se denominan rosas. Además:

Si $n$ es impar, la curva tiene $n$ pétalos.

Si $n$ es par, la curva tiene $2n$ pétalos.



$r = 3\cos(3\theta)$



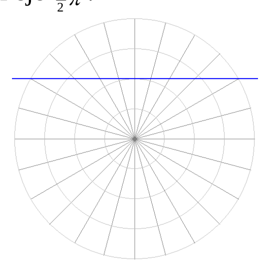
$r = 3\cos(2\theta)$

Si se sustituye $r$ por $r^2$ en la ecuación de una rosa, el número de pétalos cambia a $2n$ si $n$ es impar y se mantiene en $n$ si $n$ es par. Las curvas de número par de pétalos que resultan de esta sustitución se denominan lemniscatas.

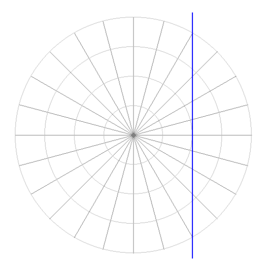
**3**.- La gráfica de la ecuación $\theta = C$ donde $C$ es una constante, es una recta que contiene al polo y forma un ángulo de $C$ radianes con el eje polar. La misma recta está representada por la ecuación $\theta = C + n\pi$ donde $n$ es cualquier número entero.

**4**.- La gráfica de la ecuación $r\,\mathrm{sen}\,\theta = b$ es una recta paralela al eje polar y pasa por el punto $b$ cuyas coordenadas cartesianas son $(0, b)$ y cuyas coordenadas polares son $(b, \pi/2)$. Si $b$ es positivo, la recta está por arriba del eje polar. Si $b$ es negativo, la recta está por debajo del eje polar.

**5**.- La gráfica de la ecuación $r\cos\theta = a$ es una recta perpendicular al eje polar y pasa por el punto $a$ cuyas coordenadas cartesianas son $(a, 0)$ y cuyas coordenadas polares son $(a, 0)$. Si $a$ es positivo, la recta está a la derecha del eje $\frac{1}{2}\pi$. Si $a$ es negativo, la recta está a la izquierda del eje $\frac{1}{2}\pi$.



$r = 2\sec\theta$

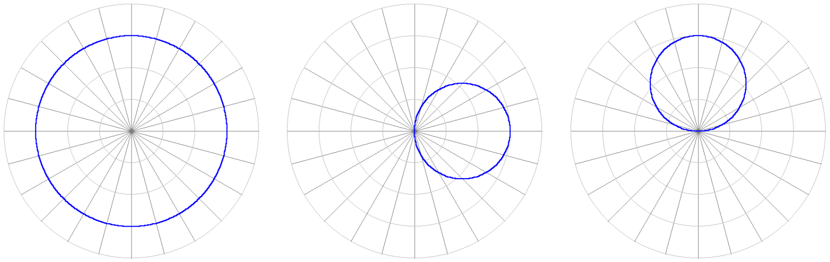


$r = 2\csc\theta$

**6**.- La gráfica de la ecuación $r = C$ donde $C$ es cualquier constante, es una circunferencia cuyo centro está en el polo y su radio es $|\,C\,|$. La misma circunferencia está dada por la ecuación $r = -C$.

**7**.- La gráfica de la ecuación $r = 2\,a\cos\theta$ es una circunferencia de radio $|\,a\,|$, tangente al eje $\frac{1}{2}\pi$ y centro en el eje polar o en su prolongación.

**8**.- La gráfica de la ecuación $r = 2\,b\,\text{sen}\,\theta$ es una circunferencia de radio $|\,b\,|$, tangente al eje polar y centro en el eje $\frac{1}{2}\pi$ o en su prolongación.



$r = 3$ $\qquad$ $r = 3\cos\theta$ $\qquad$ $r = 3\,\text{sen}\,\theta$

## 4.4.- Cálculo de puntos de intersección en coordenadas polares.

**1**.- Resolver el sistema de las dos ecuaciones en polares. Las soluciones son puntos de intersección.

**2**.- Sustituir $r$ por $-r$ y $\theta$ por $\theta + \pi$ en *una* de las ecuaciones y resolver el sistema formado por la *otra* ecuación y esta nueva. Las soluciones son puntos de intersección también.

**3**.- Comprobar si el polo es un punto de intersección.

**4**.- Representar las dos gráficas para decidir si se ha omitido el cálculo de algún punto de intersección.

## 4.5.- Área en coordenadas polares.

Si $f$ es no negativa y continua sobre el intervalo $[\,\alpha\,,\beta\,]$, con $0 < \alpha - \beta \leq 2\,\pi$, entonces el área de la región limitada por $r = f(\theta)$, $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ viene dada por

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} [\,f(\theta)]^2\,d\theta$$

## 4.6.- Pendiente en polares.

Si $f$ es una función derivable de $\theta$, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $r = f(\theta)$ en el punto $(\,r\,,\theta\,)$ es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\,\text{sen}\,\theta}{-f(\theta)\,\text{sen}\,\theta + f'(\theta)\cos\theta}$$

siempre que $dx/d\theta \neq 0$ en $(\,r\,,\theta\,)$.

## Coordenadas curvilíneas.

Los dos sistemas de coordenadas curvilíneas más frecuentemente utilizados son el cilíndrico y el esférico.

## 5.- Coordenadas cilíndricas.

El sistema de coordenadas cilíndricas es una generalización del sistema de coordenadas polares a tres dimensiones. En dicho sistema se representa un punto arbitrario $P$ mediante un conjunto ordenado de tres números $(\,r\,,\theta\,,z\,)$, siendo $(\,r\,,\theta\,)$ la representación polar de la proyección de $P$ sobre el plano $x\,y$ y $z$ la distancia orientada desde el plano $xy$ al punto $P$.

Para coordenadas cilíndricas las variables están relacionadas con $x$, $y$, $z$ en la siguiente forma:

### 5.1.- Conversión de coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares:

$x = r\cos\theta$ $\qquad$ $y = r\,\text{sen}\,\theta$ $\qquad$ $z = z$

### 5.2.- Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas:

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad z = z$$

Los intervalos de las variables son:

$0 \leq r \leq \infty$ $\qquad$ $0 \leq \theta \leq 2\,\pi$ $\qquad$ $-\infty \leq z \leq \infty$

## 6.- Coordenadas esféricas.

En el sistema de coordenadas esféricas un punto $P$ se representa mediante un conjunto ordenado de tres números $(\,\rho\,,\theta\,,\phi\,)$, siendo $\rho$ (la letra griega ro minúscula) la distancia entre el punto $P$ y el origen, $\theta$ igual que en coordenadas cilíndricas y $\phi$ el ángulo entre el semieje $z$ positivo y el segmento $OP$.

En el caso de coordenadas esféricas, las variables están relacionadas con $x$, $y$, $z$ en esta forma:

### 6.1.- Conversión de coordenadas esféricas a coordenadas rectangulares:

$x = \rho\;\text{sen}\,\phi\;\cos\theta$ $\qquad$ $y = \rho\;\text{sen}\,\phi\;\text{sen}\,\theta$ $\qquad$ $z = \rho\;\cos\phi$

### 6.2.- Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas:

$$\rho = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

Los intervalos de las variables son:

$0 \leq r \leq \infty$ $\qquad$ $0 \leq \theta \leq \pi$ $\qquad$ $0 \leq \phi \leq 2\,\pi$

## 7.- Conversión entre coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas.

### 7.1.- Conversión de coordenadas esféricas a coordenadas cilíndricas:

$r = \rho\;\text{sen}\,\phi$ $\qquad$ $\theta = \theta$ $\qquad$ $z = \rho\;\cos\phi$

### 7.2.- Conversión de coordenadas cilíndricas a coordenadas esféricas:

$$\rho = +\sqrt{r^2 + z^2} \qquad \theta = \theta \qquad \phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right)$$


Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**.
Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**
e-mail: **medinawj@gmail.com**
Twitter: **@medinawj**


El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:
**https://www.tutoruniversitario.com/** Maturín, diciembre de 2024.