FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

1.- Definición de función de dos variables.

Si a cada par ordenado (x , y) de elementos de un cierto conjunto D le corresponde un número real $f(x, y)$, decimos que f es una **función de x y de y**. El conjunto D es el dominio de f y el conjunto correspondiente de valores $f(x, y)$ recibe el nombre de **recorrido** de f.

Una **función polinomial** de las variables x y y es una función f tal que $f(x, y)$ es la suma de términos de la forma $c\,x^n y^m$, donde c es un número real y n y m son números enteros no negativos. El **grado** de una función polinomial está determinado por la mayor suma de los exponentes de x y y que se tiene en los términos de la función.

2.- Dominio de una función de dos variables.

Dada la función $f(x,y)=\dfrac{N(x,y)}{D(x,y)}$, su dominio está dado por

$$\text{Dom}\,f=\text{Dom}\,N\cap\text{Dom}\,D-\{(x,y)\in R^2\,/\,D(x,y)=0\}$$

Restricciones en el dominio para cada tipo de funciones.

Nombre	Función	Dominio de la función
Polinomial	$a_0+a_{11}x+a_{12}y+a_{21}xy\ldots$	R^2
Racional	$\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$	$\text{Dom}\,P\cap\text{Dom}\,Q-\{(x,y)\in R^2\,/\,Q(x,y)=0\}$
Radical	$\sqrt[n]{f(x,y)}$	n es un número par: $\{(x,y)\in R^2\,/\,f(x,y)\geq 0\}$
Radical	$\sqrt[n]{f(x,y)}$	n es un número impar: $\text{Dom}\,f(x,y)$
Valor absoluto	$\lvert f(x,y)\rvert$	$\text{Dom}\,f(x,y)$
Logarítmica	$\ln[f(x,y)]$	$\{(x,y)\in R^2\,/\,f(x,y)>0\}$
Exponencial	$e^{f(x,y)}$	$\text{Dom}\,f(x,y)$
Seno	$\text{sen}[f(x,y)]$	$\text{Dom}\,f(x,y)$
Coseno	$\cos[f(x,y)]$	$\text{Dom}\,f(x,y)$
Tangente	$\tan[f(x,y)]$	$R^2-\{(x,y)\in R^2\,/\,f(x,y)=\frac{1}{2}(2n+1)\pi\}$
Arcoseno	$\text{sen}^{-1}[f(x,y)]$	$-1\leq f(x,y)\leq 1$
Arcocoseno	$\cos^{-1}[f(x,y)]$	$-1\leq f(x,y)\leq 1$
Arcotangente	$\tan^{-1}[f(x,y)]$	$\text{Dom}\,f(x,y)$

3.- Definición de límite de una función de dos variables.

Sea f una función de dos variables, definida [con la posible excepción del punto (a , b)] en el interior de un círculo centrado en (a,b). Entonces se tendrá $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ si y sólo si a cada $\varepsilon > 0$ corresponde un $\delta > 0$ tal que

$\lvert f(x,y)-L\rvert<\varepsilon$ siempre que $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$

4.- Definición de continuidad de una función de dos variables.

Una función f de dos variables es **continua en** (a,b) si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$. Si D es un subconjunto del dominio de f, diremos que f es continua en D si f es continua en cada punto (a , b) de D.

5.- Definición de derivada parcial.

Si $z = f(x, y)$, entonces las **derivadas parciales de primer orden de f con respecto a x y a y** son las funciones

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

6.- Notaciones (derivadas parciales de primer orden).

Si $z = f(x, y)$, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_x=z_x=\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)=f_x(x,y)$ y

$$\frac{\partial f}{\partial y}=f_y=z_y=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=f_y(x,y)$$

Las derivadas parciales de primer orden calculadas en el punto (a , b) se denotan por

$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}$ ó bien $f_x(a, b)$ $\qquad$ $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)}$ ó bien $f_y(a, b)$

7.- Definición de diferencial total.

Sea $z = f(x, y)$. Si existen ambas derivadas parciales de primero orden de z, se define la **diferencial total** dz como $dz=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$

8. Incrementos y diferenciales. Aproximación lineal.

Si $w = f(x, y, z)$, entonces el incremento Δf está dado por $\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$, de donde:

$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = f(x, y, z) + \Delta f$

Cuando $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ y $|\Delta z|$ son suficientemente pequeños, se verifica la igualdad aproximada $\Delta f\approx df$, o sea $\Delta f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\dfrac{\partial f}{\partial z}\Delta z$

9.- Regla de la cadena.

9.1- Una sola variable independiente.

Sea $w = f(x, y)$ función diferenciable de x e y, siendo $x = g(t)$ e $y = h(t)$ funciones diferenciables de t. La función w es entonces función de t, y se tiene $\dfrac{dw}{dt}=\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

9.2.- Dos variables independientes.

Sea $w = f(x, y)$ función diferenciable de x e y, con $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ funciones diferenciables de s y t. La función w es de forma indirecta función de s y t, y se tendrá

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\qquad\qquad \frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

10.- Obtención implícita de derivadas y derivadas parciales.

i.- Si la ecuación $F(x, y) = 0$ define y implícitamente como función de x, se tendrá $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$ $(F_y\neq 0)$

ii.- Si la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define z implícitamente como función diferenciable de x e y, entonces $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$ $(F_z\neq 0)$.

Este teorema puede extenderse a funciones diferenciables definidas implícitamente y con un número arbitrario de variables.

11.- Gradiente.

11.1.- Definición de gradiente de una función de dos variables.

Si f es una función de las dos variables x y y, y f_x y f_y existen, entonces el **gradiente** de f, denotado por ∇f, está definido por el vector $\nabla f=f_x(x,y)\,\mathbf{i}+f_y(x,y)\,\mathbf{j}$.

11.2.- Definición de gradiente de una función de tres variables.

Si f es una función de las tres variables x, y y z, y las tres primeras derivadas parciales f_x, f_y y f_z existen, entonces el **gradiente** de f, denotado por ∇f, está definido por el vector $\nabla f = f_x(x,y,z)\,\mathbf{i} + f_y(x,y,z)\,\mathbf{j} + f_z(x,y,z)\,\mathbf{k}$.

12.- Derivada direccional.

12.1.- Definición de derivada direccional.

Sea f una función de dos variables x e y. La **derivada direccional de f en la dirección θ**, denotada $D_\theta f$, es $D_\theta f = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{f\,(x+\Delta s\cos\theta,\, y+\Delta s \operatorname{sen}\theta) - f\,(x,y)}{\Delta s}$.

12.2.- Fórmula de la derivada direccional.

Sea f una función diferenciable de x e y. La derivada direccional de f en la dirección θ es $D_\theta f = f_x\,(\,x\,,y\,)\cos\theta + f_y\,(\,x\,,y\,)\operatorname{sen}\theta$, siendo θ el ángulo que forma el vector unitario $\mathbf{U} = \cos\theta\;\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\;\mathbf{j}$ con el eje x positivo.

Sea f una función de tres variables x, y y z. La derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{U}$ está dada por $D_U f = f_x\,(\,x\,,y\,,z\,)\cos\alpha + f_y\,(\,x\,,y\,,z\,)\cos\beta + f_z\,(\,x\,,y\,,z\,)\cos\gamma$, siendo $\mathbf{U} = (\cos\alpha)\;\mathbf{i} + (\cos\beta)\;\mathbf{j} + (\cos\gamma)\;\mathbf{k}$ un vector unitario.

13.- Derivada direccional en función del gradiente.

Si f es una función de x e y y ∇f es el gradiente de f, la derivada direccional de f en la dirección U está dada por $D_U\, f = \nabla f . U$, siendo $\mathbf{U}$ un vector unitario.

Si la dirección está dada por una curva $\mathbf{r}$ (t), entonces $D_U\, f = \nabla f . \mathbf{T}$, siendo $\mathbf{T}$ el vector tangente unitario.

14.- Aplicaciones de ∇f.

El gradiente de f, evaluado en el punto $(\,x_0\,, y_0\,, z_0\,)$ tiene las siguientes propiedades:

i.- ∇f posee la dirección de máximo aumento de f en $(\,x_0\,, y_0\,, z_0\,)$.

ii.- $|\nabla f|$ es el valor máximo de la derivada direccional en $(\,x_0\,, y_0\,, z_0\,)$.

iii. ∇f es un vector perpendicular a la superficie en $(\,x_0\,, y_0\,, z_0\,)$.

15.- Plano tangente y recta normal a una superficie.

Siendo que ∇f es un vector perpendicular a la superficie, entonces el vector normal del plano tangente y el vector director de la recta normal son paralelos a ∇f.

1.- Si $z = f\,(\,x\,,y\,)$ es diferenciable en $(\,x_0\,, y_0\,, z_0\,)$, entonces el plano tangente y la recta normal a f en $(\,x_0\,, y_0\,, z_0\,)$ están dados por

Plano tangente: $f_x\,(\,x_0\,, y_0\,)\,(x - x_0) + f_y\,(\,x_0\,, y_0\,)\,(y - y_0) - (z - z_0) = 0$

Recta normal: $\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)} = \dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)} = \dfrac{z-z_0}{-1}$

2.- Si F es diferenciable en $(\,x_0\,, y_0\,, z_0\,)$, el plano tangente y la recta normal a F en $(\,x_0\,, y_0\,, z_0\,)$ están dados por

Plano tangente: $f_x\,(\,x_0\,, y_0\,)\,(x - x_0) + f_y\,(\,x_0\,, y_0\,)\,(y - y_0) + f_z\,(\,x_0\,, y_0\,)\,(z - z_0) = 0$

Recta normal: $\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0,z_0)} = \dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0,z_0)} = \dfrac{z-z_0}{f_z(x_0,y_0,z_0)}$

16.- Superficies tangentes.

Se dice que dos superficies $f\,(\,x\,,y\,,z\,)$ y $g\,(\,x\,,y\,,z\,)$ son tangentes en un punto de intersección $(\,x_0\,, y_0\,, z_0\,)$ si tienen un plano tangente común en dicho punto. En la práctica, dos superficies son tangentes entre sí en un punto de intersección $(\,x_0\,, y_0\,, z_0\,)$ si los vectores ∇f y ∇g son paralelos en ese punto.

17. Ángulo entre dos superficies.

Si el punto $(\,x_0\,, y_0\,, z_0\,)$ es un punto común a dos superficies $f\,(\,x\,,y\,,z\,)$ y $g\,(\,x\,,y\,,z\,)$, entonces el ángulo entre dichas superficies en el punto de intersección es el ángulo entre sus vectores gradiente.

18. Vector tangente a una curva de intersección de dos superficies.

Si la curva $\mathbf{r}$ (t) es la curva de intersección de dos superficies, entonces el vector tangente a dicha curva es el producto vectorial de los gradientes de las dos superficies que se intersectan evaluados en el punto $(\,x_0\,, y_0\,, z_0\,)$.

19.- Teorema de los valores extremos.

Sea f una función de dos variables x e y, definida y continua en una región cerrada R del plano x y. Se tiene:

i.- Existe al menos un punto de R en el que f toma un valor mínimo.

ii.- Existe al menos un punto de R en el que f toma un valor máximo.

20.- Definición de extremos locales.

Sea f una función definida en $(\,x_0\,, y_0\,)$. El valor $f\,(\,x_0\,, y_0\,)$ se denomina:

8.1.- **Máximo relativo** de f si existe una región circular R que contenga el punto $(\,x_0\,, y_0\,)$ y tal que $f\,(\,x\,,y\,) \le f\,(\,x_0\,, y_0\,)$ para todo punto $(\,x\,,y\,)$ de R.

8.2.- **Mínimo relativo** de f si existe una región circular R que contenga el punto $(\,x_0\,, y_0\,)$ y tal que $f\,(\,x\,,y\,) \ge f\,(\,x_0\,, y_0\,)$ para todo punto $(\,x\,,y\,)$ de R.

21.- Criterio de las derivadas parciales de primer orden.

Si $f\,(\,x_0\,, y_0\,)$ es un extremo de f en una región abierta R del plano x y, y existen las primeras derivadas parciales de f en R, entonces se tiene $f_x\,(\,x_0\,, y_0\,) = 0 = f_y\,(\,x_0\,, y_0\,)$.

22.- Definición de punto crítico.

Un punto $(\,x_0\,, y_0\,)$ en el que $f_x\,(\,x\,,y\,) = 0$ y $f_y\,(\,x\,,y\,) = 0$ se denomina punto crítico de f.

23.- Criterio de las derivadas parciales de segundo orden.

Sea f una función de dos variables que posee derivadas continuas de primer y segundo orden en una región abierta R. Supongamos además que $f_x\,(\,x\,,y\,) = f_y\,(\,x\,,y\,) = 0$ en algún punto (a,b) de R. Sea $D\,(\,a\,,b\,) = f_{xx}\,(\,a\,,b\,)\,f_{yy}\,(\,a\,,b\,) - [f_{xy}\,(\,a\,,b\,)]^2$.

i.- $f\,(\,a\,,b\,)$ es un **mínimo** local de f si $D\,(\,a\,,b\,) > 0$ y $f_{xx}\,(\,a\,,b\,) > 0$ (ó $f_{yy}\,(\,a\,,b\,) > 0$).

ii.- $f\,(\,a\,,b\,)$ es un **maximo** local de f si $D\,(\,a\,,b\,) > 0$ y $f_{xx}\,(\,a\,,b\,) < 0$ (ó $f_{yy}\,(\,a\,,b\,) < 0$).

iii.- $(\,a\,,b\,, f\,(\,a\,,b\,)$ es un punto de ensilladura si $D\,(\,a\,,b\,) < 0$.

La expresión para $D\,(\,a\,,b\,) = f_{xx}\,(\,a\,,b\,)\,f_{yy}\,(\,a\,,b\,) - [f_{xy}\,(\,a\,,b\,)]^2$ es el determinante $D(a,b) = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$, denominado **hessiano** (o **discriminante**) de la función f.

24.- Método de los multiplicadores de Lagrange.

Para hallar los extremos locales de $f\,(\,x\,,y\,,z\,)$, sujeta a la ligadura $g\,(\,x\,,y\,,z\,) = 0$, calcular los valores críticos de la nueva función F definida por $f\,(\,x\,,y\,,z\,,\lambda\,) = f\,(\,x\,,y\,,z\,) + \lambda\, g\,(\,x\,,y\,,z\,)$. La variable λ se denomina un **multiplicador de Lagrange**.

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**.
Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**
e-mail: **medinawj@gmail.com**
Twitter: **@medinawj**

El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:
https://www.tutoruniversitario.com/ Maturín, diciembre de 2024.