INTEGRALES MÚLTIPLES.

1.- Definición de integral doble.

Dada una función f definida sobre una región R acotada en el plano $x\,y$, entonces la integral doble de f sobre R se define como

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta x_i \Delta y_1$$

cuando tal límite existe.

2.- Propiedades de las integrales dobles.

Si f y g son continuas sobre la región acotada R del plano, entonces

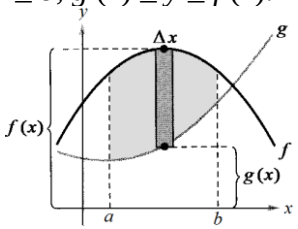
1.- $\iint_R c\,f(x,y)\,dA = c\iint_R f(x,y)\,dA$

2.- $\iint_R [f(x,y)\pm g(x,y)]\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA \pm \iint_R g(x,y)\,dA$

3.- $\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA$ donde R_1 y R_2 son una partición de R.

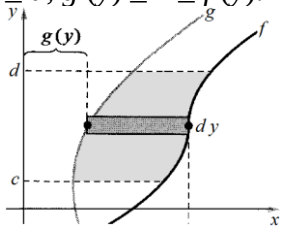
3.- Áreas en el plano mediante integrales iteradas.

Región limitada por $a \le x \le b$, $g(x) \le y \le f(x)$.



$$A = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} d\,y\,d\,x$$

Región limitada por $c \le y \le d$, $g(y) \le x \le f(y)$.



$$A = \int_c^d \int_{g(y)}^{f(y)} d\,x\,d\,y$$

4.- Área de una superficie.

Si f es diferenciable sobre una región R del plano $x\,y$, entonces el área de la superficie $z = f(x,y)$, con base R, está dada por:

$$S = \iint_R \sqrt{1+[f_x(x,y]^2 + [f_y(x,y]^2}\;dA$$

5.- Centros de masa y momentos de inercia.

Sea $\rho(x,y)$ la densidad de una lámina que ocupa una región plana R, entonces la masa de la lámina viene dada por:

$$m = \iint_R \rho(x,y)\,dA$$

6.- Momentos y centro de masa de una lámina plana.

Sea $\rho(x,y)$ la densidad de una lámina que ocupa una región plana R. Entonces los momentos de la lámina respecto a los ejes x e y vienen determinados por:

$$M_x = \iint_R y\,\rho(x,y)\,dA$$

$$M_y = \iint_R x\,\rho(x,y)\,dA$$

Además, si m es la masa total de la lámina, el centro de masa es dado por

$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right).$$

Los momentos M_x y M_y que aparecen al calcular el centro de masa se llaman a veces **momentos primeros** respecto a los ejes x e y, respectivamente

7.- Momentos de inercia.

Sea $\rho(x,y)$ la densidad de una lámina que ocupa una región plana R. Entonces los momentos de inercia respecto a los ejes x e y vienen determinados por:

$$I_x = \iint_R y^2\rho(x,y)\,dA$$

$$I_y = \iint_R x^2\rho(x,y)\,dA$$

8.- Momento polar de inercia.

El momento polar de inercia I_0 se define por:

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2+y^2)\,\rho(x,y)\,dA$$

9.- Radio de giro.

Los momentos I_x e I_y determinan el radio de giro. Denominaremos $\bar{x}$ el *radio de giro de R respecto al eje y* y $\bar{y}$ el *radio de giro de R respecto al eje x*.

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{I_y}{m}} \text{ e } \bar{y} = \sqrt{\frac{I_x}{m}}$$

donde *m* denota la masa de la lámina en consideración.

10.- Definición de integral triple.

Si *f* es continua sobre una región sólida *S*, entonces la integral triple de *f* sobre *S* se define como

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dV = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

donde la diferencial dV representa cualquiera de las seis combinaciones

$d\,x\,d\,y\,d\,z$ $\quad$ $d\,x\,d\,z\,d\,y$

$d\,y\,d\,x\,d\,z$ $\quad$ $d\,y\,d\,z\,d\,x$

$d\,z\,d\,x\,d\,y$ $\quad$ $d\,z\,d\,y\,d\,x$

11.- Momentos y centro de masa de un sólido.

Sea $\rho\,(\,x\,,\,y\,,\,z\,)$ la densidad de un sólido que ocupa una región sólida *S*. Entonces la masa del sólido es:

$$m = \iiint_S \rho(x,y,z)\,dV$$

y los momentos de la lámina respecto a los planos *xz*, *xz* y *xy* vienen determinados por:

$$M_{xz} = \iiint_S y\,\rho(x,y,z)\,dV$$

$$M_{yz} = \iiint_S x\,\rho(x,y,z)\,dV$$

$$M_{xy} = \iiint_S z\,\rho(x,y,z)\,dV$$

Además, si *m* es la masa total de la lámina, el centro de masa es dado por

$$(x,y,z) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m}\right).$$

12.- Momentos de inercia.

Sea $\rho\,(\,x\,,\,y\,,\,z\,)$ la densidad de un sólido que ocupa una región sólida *S*. Entonces los momentos de inercia respecto a los ejes *x*, *y* y *z* vienen determinados por:

$$I_x = \iiint_S (y^2 + z^2)\,\rho(x,y,z)\,d\,A$$

$$I_y = \iiint_S (x^2 + z^2)\,\rho(x,y,z)\,d\,A$$

$$I_z = \iiint_S (x^2 + y^2)\,\rho(x,y,z)\,d\,A$$

Para regiones sólidas los momentos primeros se toman respecto a planos, mientras que los momentos de inercia se toman respecto de rectas.

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**.
Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**
e-mail: **medinawj@gmail.com**
Twitter: **@medinawj**

El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:
https://www.tutoruniversitario.com/ Maturín, diciembre de 2024.