GEOMETRÍA ANALITICA EN R^3. (RECTAS Y PLANOS).

1.- Rectas.

1.1- Ecuaciones paramétricas de una recta en R^3.

Una recta L que pasa por los puntos $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ y $P_1\ (x_1, y_1, z_1)$ puede describirse mediante las siguientes ecuaciones paramétricas:

$x = x_0 + a\,t,\ y = y_0 + b\,t$ y $z = z_0 + c\,t$

$P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ es un punto que pertenece a la recta y $\mathbf{A} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ es el vector director de la recta, siendo $\mathbf{A} = P_0P_1$ ($a = x_1 - x_0$, $b = y_1 - y_0$ y $c = z_1 - z_0$)

Obsérvese que las ecuaciones paramétricas

$x = x_1 + a\,t,\ y = y_1 + b\,t$ y $z = z_1 + c\,t$

definen a la misma recta L, por lo cual puede afirmarse que las ecuaciones paramétricas de una recta en R^3 no es única.

Si α, β, γ son los ángulos directores de L, entonces la forma simétrica puede escribirse también como:

$x = x_0 + (\cos\alpha)\,t,\ y = y_0 + (\cos\beta)\,t$ y $z = z_0 + (\cos\gamma)\,t$.

1.2.- Ecuación vectorial paramétrica de una recta en R^3.

Una recta L que pasa por los puntos $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ y $P_1\ (x_1, y_1, z_1)$ puede describirse mediante la siguiente ecuación vectorial paramétrica: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{A}\,t$, donde $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{A} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ es el vector director de la recta, siendo $a = x_1 - x_0$, $b = y_1 - y_0$ y $c = z_1 - z_0$.

1.3.- Ecuaciones simétricas de una recta en R^3.

Una recta L que pasa por los puntos $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ y $P_1\ (x_1, y_1, z_1)$ puede describirse mediante la siguiente ecuación simétrica:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c},$$ siendo

$a = x_1 - x_0$, $b = y_1 - y_0$ y $c = z_1 - z_0$.

Obsérvese que la ecuación simétrica $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ define a la misma recta L, por lo cual puede afirmarse que la ecuación simétrica de una recta en R^3 no es única.

Si α, β, γ son los ángulos directores de L, entonces la forma simétrica puede escribirse también como:

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha} = \frac{y-y_0}{\cos\beta} = \frac{z-z_0}{\cos\gamma}.$$

1.4.- Punto perteneciente a una recta.

Un punto (x_0, y_0, z_0) pertenece a una recta si al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación simétrica de la recta se obtiene una igualdad ó si existe un valor del parámetro t tal que al ser sustituido en las ecuaciones paramétricas, reproduce las coordenadas del punto.

1.5.- Posición relativa de dos rectas.

1.5.1.- Angulo entre dos rectas.

Un ángulo (θ) entre dos rectas se define como el ángulo entre los vectores directores de las rectas.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}_1 . \mathbf{A}_2}{\|\mathbf{A}_1\|\|\mathbf{A}_2\|}$$

1.5.2.- Rectas paralelas en R^3.

Dos rectas son paralelas en R^3 si y sólo si sus vectores directores son paralelos.

Criterio: $\mathbf{A}_1 = \alpha\,\mathbf{A}_2$ ó $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 = 0$.

1.5.3.- Rectas perpendiculares en R^3.

Dos rectas son perpendiculares en R^3 si y sólo si sus vectores directores son perpendiculares. Criterio: $\mathbf{A}_1 . \mathbf{A}_2 = 0$.

1.6.- Puntos colineales.

1.6.1.- Enfoque usando la distancia entre dos puntos.

Tres puntos A, B y C en R^3 son colineales si la longitud del segmento de recta definido por un par de ellos es la suma de la longitud de los segmentos formados por los otros dos pares.

1.6.2.- Enfoque usando vectores.

Tres puntos A, B y C en R^3 son colineales si, involucrando los tres puntos, se define un par de vectores entre ellos, y los vectores definidos resultan paralelos.

Tres puntos A, B y C en R^3 son colineales si el producto vectorial de cualquier combinación de dos vectores definidos entre ellos es el vector nulo.

1.6.3.- Enfoque usando la ecuación de la recta.

Tres puntos A, B y C son colineales si la recta definida por dos de ellos contiene al tercer punto.

1.7.- Intersección de dos rectas en R^3.

Dos rectas en R^3 se intersectan si existen los parámetros t y s para las rectas 1 y 2 respectivamente tal que el punto $P'(x', y', z')$ pertenece a ambas rectas.

Sean las rectas L_1 y L_2 en R^3 con vectores directores $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ respectivamente. Sea P un punto de la recta L_1, Q un punto de la recta L_2 y $\mathbf{PQ}$ un vector definido por los puntos P y Q.

Se presentan los siguientes casos:

1.7.1.- Las rectas no se intersectan.

Condición: $\mathbf{PQ} . \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \neq 0$

1.7.2.- Las rectas se intersectan en un punto.

Condiciones: $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \neq 0$ y $\mathbf{PQ} . \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 = 0$

Valor de los parámetros t y s en el punto de intersección:

$$t = -\frac{\|\mathbf{PQ}\times\mathbf{A}_2\|}{\|\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2\|},\quad s = -\frac{\|\mathbf{PQ}\times\mathbf{A}_1\|}{\|\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2\|}$$

1.7.3.- Las rectas son coincidentes (se intersectan en todos sus puntos).

Condiciones: $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 = 0$ y $\mathbf{PQ} . \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 = 0$

1.8.- Rectas oblicuas en R^3.

Dos rectas en R^3 son oblicuas si no son paralelas y no se intersectan.

Condiciones: $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \neq 0$ y $\mathbf{PQ} . \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \neq 0$

1.9.- Distancia.

1.9.1.- Distancia entre un punto y una recta.

Sea el punto $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ y la recta $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$, la distancia entre el punto P_0 y la recta está dada por:

$$\text{Distancia} = \frac{\|\mathbf{QP}_0\times\mathbf{A}_1\|}{\|\mathbf{A}\|},$$ donde Q es un punto cualquiera de la recta, $\mathbf{QP}_0$ es un vector definido por los puntos Q y P_0, y $\mathbf{A}$ es el vector director de la recta. El valor del parámetro t que genera el punto de la recta más próximo al punto dado es:

$$t = \frac{(X_2 - X_0).(X_1 - X_0)}{\|X_1 - X_0\|^2},$$ donde X_2 es el punto dado, exterior a la recta, y X_0 y X_1 son dos puntos arbritrarios que pertenecen a la recta.

1.9.2.- Distancia entre dos rectas paralelas.

Sean las rectas L_1 y L_2 en R^3 con vectores directores $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ respectivamente. La distancia entre ambas rectas está dada por:

$$\text{Distancia} = \frac{\|\mathbf{QP}\times\mathbf{A}_1\|}{\|\mathbf{A}_1\|},$$ donde Q es un punto de la recta L_1, P es un punto de la recta L_2, $\mathbf{QP}$ es un vector definido por los puntos Q y P.

1.9.3.- Distancia entre dos rectas oblicuas.

Sean las rectas L_1 y L_2 en R^3 con vectores directores $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ respectivamente. La distancia entre ambas rectas está dada por:

$$\text{Distancia} = \frac{|\mathbf{QP}.\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2|}{\|\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2\|},$$ donde Q es un punto de la recta L_1, P es un punto de la recta L_2, $\mathbf{QP}$ es un vector definido por los puntos Q y P.

2.- Plano.

Superficie, real o imaginaria, en la cual dos puntos están unidos por una recta que está contenida enteramente en dicha superficie.

2.1.- Ecuación canónica de un plano en R^3.

Sea $\mathbf{N} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ un vector no nulo, normal al plano que contiene el punto $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$. La ecuación canónica de ese plano es $a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0$

La ecuación canónica de un plano es única.

Si α, β, γ son los ángulos directores de $\mathbf{N}$, entonces la forma canònica puede escribirse también en la forma

$\cos\alpha\,(x - x_0) + \cos\beta\,(y - y_0) + \cos\gamma\,(z - z_0) = 0$.

En forma vectorial: $\mathbf{N} . (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) = 0$, donde $\mathbf{P} = (x, y, z)$, $\mathbf{P}_0\ (x_0, y_0, z_0)$ es un punto que pertenece al plano y $\mathbf{N} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ es el vector normal al plano.

2.2.- Ecuación general de un plano en R^3.

Sea $\mathbf{N} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ un vector no nulo, normal a un plano que contiene el punto $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$. La ecuación general de ese plano es $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$, siendo

$d = -(a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0)$.

2.3.- Ecuación paramétrica de un plano en R^3.

Sean $\mathbf{U} = a_1\,\mathbf{i} + b_1\,\mathbf{j} + c_1\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{V} = a_2\,\mathbf{i} + b_2\,\mathbf{j} + c_2\,\mathbf{k}$ dos vectores contenidos en un plano que contiene el punto $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$. La ecuación vectorial paramétrica de ese plano es $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{U}\,t_1 + \mathbf{V}\,t_2$ donde $\mathbf{X} = (x, y, z)$, $\mathbf{X}_0\ (x_0, y_0, z_0)$ es un punto que pertenece al plano. Si $\mathbf{N} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ es el vector normal al plano, entonces

$\mathbf{N} = \mathbf{U} \times \mathbf{V}$. La ecuación vectorial paramétrica de un plano en R^3 no es única.

2.4.- Punto perteneciente a un plano. Un punto (x_0, y_0, z_0) pertenece a un plano si al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación del plano se obtiene una igualdad.

2.5.- Plano definido por tres puntos. Tres puntos A, B y C en R^3 definen un plano si no son colineales. El vector normal del plano está dado por el producto vectorial de dos vectores cualesquiera definidos usando los tres puntos. Un punto del plano es cualquiera de los tres puntos dados.

La ecuación del plano que pasa por los tres puntos $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ y $P_3\,(x_3, y_3, z_3)$ en forma de determinante es
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2.6.- Plano definido por dos rectas en R^3. Dos rectas en R^3 definen un plano si ambas rectas son paralelas o se intersectan en un punto. Si las rectas son oblícuas, no definen un plano.

2.7.- Plano definido por dos rectas paralelas. Si ambas rectas son paralelas, el vector normal del plano está dado por $\mathbf{N} = \mathbf{PQ} \times \mathbf{L}$, donde P es un punto de una de las rectas, Q es un punto de la otra recta, PQ es el vector definido por P y Q y $\mathbf{L}$ es el vector director de cualquiera de las dos rectas. Un punto del plano es cualquier punto perteneciente a alguna de las dos rectas.

2.8.- Plano definido por dos rectas que se intersectan en un punto. Si ambas rectas se intersectan, el vector normal del plano está dado por el producto vectorial de los vectores directores de ambas rectas: $\mathbf{N} = \mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2$ y un punto del plano es el punto de intersección (o cualquier punto perteneciente a alguna de las dos rectas).

2.9.- Posición relativa de dos planos.

2.9.1.- Angulo entre dos planos.

Un ángulo entre dos planos se define como el ángulo entre los vectores normales de los planos.
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{N}_1 . \mathbf{N}_2}{\|\mathbf{N}_1\|\|\mathbf{N}_2\|}$$

2.9.2.- Planos paralelos en R^3.

Dos planos son paralelos en R^3 si y sólo si sus vectores normales son paralelos.

Criterio: $\mathbf{N}_1 = \alpha\, \mathbf{N}_2$ ó $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = 0$.

2.9.3.- Planos perpendiculares en R^3.

Dos planos son perpendiculares en R^3 si y sólo si sus vectores normales son ortogonales.

Criterio: $\mathbf{N}_1 \,.\, \mathbf{N}_2 = 0$.

2.10.- Intersección de dos planos en R^3.

Dos planos en R^3 se intersectan si es posible determinar la ecuación de una recta que satisfaga la ecuación de ambos planos.

Sean los planos π_1 y π_2 en R^3 con vectores normales $\mathbf{N}_1$ y $\mathbf{N}_2$ respectivamente. Sea P un punto del plano π_1, Q un punto del plano π_2 y $\mathbf{PQ}$ un vector definido por los puntos P y Q.

Se presentan los siguientes casos:

2.10.1.- Los planos no se intersectan.

Condición: $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \mathbf{0}$ (Los planos son paralelos).

2.10.2.- Los planos se intersectan en una recta.

Condiciones: $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 \neq 0$ y $\mathbf{PQ} \,.\, \mathbf{N}_1 \neq 0$

El vector director de la recta de intersección de dos planos en R^3 es $\mathbf{L} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$ y $\mathbf{PQ} \,.\, \mathbf{N}_1 \neq 0$

Un punto de la recta de intersección es cualquier punto perteneciente a ambos planos.

2.10.3.- Los planos son coincidentes (se intersectan en todos sus puntos).

Condiciones: $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = 0$ y $\mathbf{PQ} \,.\, \mathbf{N}_1 = 0$

Dos planos en R^3 son coincidentes si sus ecuaciones son idénticas. En este caso no existe la ecuación de la recta intersección.

2.11.- Posición relativa de una recta y un plano.

2.11.1. - Ángulo entre una recta y un plano.

Un ángulo entre una recta y un plano se define como el ángulo complementario entre el vector director de la recta y el vector normal del plano. Si $\mathbf{A}$ es el vector director de la recta, y $\mathbf{N}$ es el vector normal del plano, entonces: $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\dfrac{|\mathbf{A}.\mathbf{N}|}{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{N}\|}\right)$

2.12.- Intersección de una recta y un plano en R^3.

Una recta y un plano en R^3 se intersectan si existen el parámetro t para la recta tal que el punto $X'(x', y', z')$ pertenece a dicha recta y al plano.

Sea la recta L y el plano π en R^3 con vector director y vector normal $\mathbf{A}$ y $\mathbf{N}$ respectivamente. Sea P un punto de la recta L, Q un punto del plano π y $\mathbf{PQ}$ un vector definido por los puntos P y Q.

Se presentan los siguientes casos:

2.12.1.- La recta y el plano no se intersectan.

Condiciones: $\mathbf{N} \,.\, \mathbf{A} = 0$ y $\mathbf{N} \,.\, \mathbf{PQ} \neq 0$ (La recta y el plano son paralelos).

2.12.2.- La recta y el plano se intersectan en un punto.

Condiciones: $\mathbf{N} \,.\, \mathbf{A} \neq 0$ y $\mathbf{N} \,.\, \mathbf{PQ} \neq 0$

El valor del parámetro t en el punto de intersección es:
$$t = \frac{\mathbf{N}.\mathbf{PQ}}{\mathbf{N}.\mathbf{A}}$$

2.12.3.- La recta está contenida en el plano.

Condiciones: $\mathbf{N} \,.\, \mathbf{A} = 0$ y $\mathbf{N} \,.\, \mathbf{PQ} = 0$

(Todos los puntos pertenecientes a la recta, pertenecen también al plano).

2.13.- Distancia.

2.13.1- Distancia entre un punto y un plano (Proyección).

Sea el punto $P\,(x_0, y_0, z_0)$ y el plano $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$, la distancia entre el punto P y el plano está dada por: $\text{Distancia} = \dfrac{|\mathbf{PQ}.\mathbf{N}|}{\|\mathbf{N}\|}$, donde Q es un punto cualquiera del plano, $\mathbf{PQ}$ es un vector definido por los puntos P y Q, y $\mathbf{N} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ es el vector normal del plano.

La distancia es la proyección escalar del vector $\mathbf{PQ}$ sobre el vector normal del plano.

Fórmula alternativa: $\text{Distancia} = \dfrac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

El punto sobre el plano que determina la distancia mínima entre un punto y un plano es:

$(x_0 + a\,\tau\,,\; y_0 + b\,\tau\,,\; z_0 + c\,\tau)$ donde (x_0, y_0, z_0) son las coordenadas del punto dado, $a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ es el vector normal del plano y $\tau = -\dfrac{a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$.

2.13.2.- Distancia entre una recta y un plano paralelos (Proyección).

Sea la recta L y el plano $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ paralelos en R^3. La distancia entre la recta y el plano está dada por: $\text{Distancia} = \dfrac{|\mathbf{QP}.\mathbf{N}|}{\|\mathbf{N}\|}$, donde Q es un punto del plano, P es un punto de la recta L, $\mathbf{QP}$ es un vector definido por los puntos Q y P, y $\mathbf{N} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ es el vector normal del plano. La distancia es la proyección escalar del vector $\mathbf{QP}$ sobre el vector normal del plano.

2.13.3.- Distancia entre dos planos paralelos (Proyección).

Sean dos planos paralelos en R^3: $a\,x + b\,y + c\,z + d_1 = 0$ y $a\,x + b\,y + c\,z + d_2 = 0$. La distancia entre ambos planos está dada por: $\text{Distancia} = \dfrac{|\mathbf{QP}.\mathbf{N}|}{\|\mathbf{N}\|}$, donde Q es un punto del plano 1, P es un punto del plano 2, $\mathbf{QP}$ es un vector definido por los puntos Q y P, $\mathbf{N} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ es el vector normal de ambos planos. La distancia es la proyección escalar del vector $\mathbf{QP}$ sobre el vector normal del plano.

Fórmula alternativa: $\text{Distancia} = \dfrac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

La distancia es la proyección escalar del vector $\mathbf{QP}$ sobre el vector normal del plano.

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**.
Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**
e-mail: **medinawj@gmail.com**
Twitter: **@medinawj**

El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:
https://www.tutoruniversitario.com/ Maturín, diciembre de 2024.