VECTORES.

1.- Espacio numérico tridimensional.

El conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales recibe el nombre de espacio numérico tridimensional, y se denota por R^3.

2.- Punto.

Cada terna ordenada (x,y,z) se denomina punto del espacio numérico tridimensional

3.- Resumen de fórmulas. Espacio tridimensional.

Si $A\ (x_1,y_1,z_1)$ y $B\ (x_2,y_2,z_2)$ son puntos de R^3, entonces:

3.1.- Distancia entre dos puntos. Distancia no dirigida entre *A* y *B*:

Si $A\ (x_1,y_1,z_1)$ y $B\ (x_2,y_2,z_2)$ son puntos de R^3, entonces la distancia entre *A* y *B* es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

3.2.- Tópicos relacionados con la fórmula de la distancia entre dos puntos:

- Triángulo equilátero: Tres puntos *A*, *B* y *C* en R^3 forman un triángulo equilátero si sus tres lados son iguales, esto es, la longitud de los tres segmentos de recta definidos por la combinación de los tres puntos son iguales.

- Triángulo escaleno: Tres puntos *A*, *B* y *C* en R^3 forman un triángulo escaleno si sus tres lados son diferentes, esto es, la longitud de los tres segmentos de recta definidos por la combinación de los tres puntos son diferentes.

- Triángulo isósceles: Tres puntos *A*, *B* y *C* en R^3 forman un triángulo isósceles si dos de sus tres lados son iguales, esto es, la longitud de uno de los segmentos de recta definidos por dos de los tres puntos es igual a la longitud de otro de los dos segmentos de recta restantes.

- Paralelogramo: Cuatro puntos *A*, *B*, *C* y *D* en R^3 forman un paralelogramo si la longitud de sus lados opuestos son iguales. Es necesario hacer la representación gráfica de los puntos para determinar los pares a comparar.

- Paralelepípedo: Ocho puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* y *H* en R^3 forman un paralelepípedo si la longitud de sus lados opuestos (aristas) son iguales. Es necesario hacer la representación gráfica de los puntos para determinar los cuatro lados a comparar.

3.3.- Punto medio entre *A* y *B*:

Si $A\ (x_1,y_1,z_1)$ y $B\ (x_2,y_2,z_2)$ son puntos de R^3, entonces las coordenadas del punto medio entre *A* y *B* son:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

3.4.- Punto fracción entre *A* y *B*:

Si $A\ (x_1,y_1,z_1)$ y $B\ (x_2,y_2,z_2)$ son puntos de R^3, entonces las coordenadas del punto que divide en una fracción f la distancia entre *A* y *B* respecto del punto *A* ($\overline{AS} = f\ \overline{AB}$) son:

$(x_1 + f\,(x_2 - x_1)\ ,\ y_1 + f\,(y_2 - y_1)\ ,\ z_1 + f\,(z_2 - z_1))$

4.- Vectores.

4.1.- Definición de vector.

Un vector ***A*** es el conjunto de todos los segmentos orientados del espacio que poseen una longitud y dirección dadas.

4.2.- Definición de las componentes de un vector.

Si un vector **A** se representa por medio del segmento orientado que va del punto (x_1,y_1,z_1) al (x_2,y_2,z_2), entonces la expresión en componentes de **A** es $\mathbf{A} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$, siendo:

$a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$ y $a_z = z_2 - z_1$.

$\mathbf{A} = (x_2 - x_1)\,\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\,\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\,\mathbf{k}$

Un vector escrito en componentes también se denomina **vector cartesiano**.

4.3.- Módulo de un vector.

El módulo (o longitud) de un vector $\mathbf{A} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$ se denota por $\|\,\mathbf{A}\,\|$, y se define como

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

4.4.- Vector nulo.

El vector nulo, o vector cero, es definido como el vector cuyas componentes son: 0, 0, 0. ($\mathbf{0} = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$).

4.5.- Vectores idénticos (Vectores iguales).

Dos vectores $\mathbf{A} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = b_x\,\mathbf{i} + b_y\,\mathbf{j} + b_z\,\mathbf{k}$ son iguales si y sólo si las componentes correspondientes son iguales. En consecuencia, la ecuación vectorial **A** = **B** es equivalente a las tres ecuaciones: $a_x = b_x$, $a_y = b_y$ y $a_z = b_z$.

4.6.- Vector opuesto (Negativo de un vector).

Si $\mathbf{A} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$ es un vector no nulo, entonces el vector opuesto de ***A***, denotado por $-\,\mathbf{A}$ es $-\,\mathbf{A} = -\,a_x\,\mathbf{i} - a_y\,\mathbf{j} - a_z\,\mathbf{k}$.

4.7.- Vectores unitarios.

Si $\mathbf{A} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$ es un vector no nulo, entonces el vector

$$U_A = \frac{A}{\|\mathbf{A}\|} = \frac{a_x}{\|\mathbf{A}\|}\,i + \frac{a_y}{\|\mathbf{A}\|}\,j + \frac{a_z}{\|\mathbf{A}\|}\,k$$

es un vector unitario que tiene la misma dirección que **A**.

4.8.- Cosenos directores y ángulos directores.

Si $\mathbf{A} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$, los cosenos directores de **A** son:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\|\mathbf{A}\|},\quad \cos\beta = \frac{a_y}{\|\mathbf{A}\|},\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\|\mathbf{A}\|}$$

Los ángulos α, β y γ son los ángulos directores.

Los ángulos directores de un vector diferente de cero son los tres ángulos que tienen la menor medida en radianes no negativa, α, β y γ, medidos a partir de los ejes *x*, *y* y *z* respectivamente.

4.9.- Vector unitario en función de los cosenos directores.

$\mathbf{U}_A = (\cos\alpha)\,\mathbf{i} + (\cos\beta)\,\mathbf{j} + (\cos\gamma)\,\mathbf{k}$

Si $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ son los cosenos directores de un vector, entonces $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

4.10.- Vector en función de su módulo y cosenos directores.

Si se conoce el módulo del vector, $\|\,\mathbf{A}\,\|$, y un vector unitario que representa su dirección, $\mathbf{U}_A$, entonces el vector puede escribirse en función de sus componentes como:

$\mathbf{A} = \|\,\mathbf{A}\,\|\ \mathbf{U}_A$

$\mathbf{A} = \|\,\mathbf{A}\,\|\ [(\cos\alpha)\,\mathbf{i} + (\cos\beta)\,\mathbf{j} + (\cos\gamma)\,\mathbf{k}]$

5.- Operaciones con vectores.

Si $\mathbf{A} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = b_x\,\mathbf{i} + b_y\,\mathbf{j} + b_z\,\mathbf{k}$ y λ es un escalar, entonces:

5.1.- Multiplicación por un escalar.

$\lambda\,\mathbf{A} = \lambda\,a_x\,\mathbf{i} + \lambda\,a_y\,\mathbf{j} + \lambda\,a_z\,\mathbf{k}$

5.2.- Suma de Vectores.

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_x + b_x)\,\mathbf{i} + (a_y + b_y)\,\mathbf{j} + (a_z + b_z)\,\mathbf{k}$

5.3.- Resta de Vectores.

$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (a_x - b_x)\,\mathbf{i} + (a_y - b_y)\,\mathbf{j} + (a_z - b_z)\,\mathbf{k}$

5.4.- Propiedades de la suma de vectores y de la multiplicación por un escalar.

Sean **A**, **B** y **C** vectores arbitrarios y α y β escalares. Se verifican entonces las siguientes propiedades:

i.	$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$	Propiedad conmutativa.
ii.	$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$	Propiedad asociativa.
iii.	$(\alpha\,\beta)\,\mathbf{A} = \alpha\,(\beta\,\mathbf{A})$	Propiedad asociativa.
iv.	$A\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\,\mathbf{A} + \alpha\,\mathbf{B}$	Propiedad distributiva.
v.	$(\alpha + \beta)\,\mathbf{A} = \alpha\,\mathbf{A} + \beta\,\mathbf{A}$	Propiedad distributiva.
vi.	$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$	Elemento neutro para la adición.
vii.	$\mathbf{A} + (-\,\mathbf{A}) = \mathbf{0}$	Elemento opuesto.
viii.	$\|\,\alpha\,\mathbf{A}\,\| = \|\,\alpha\,\|\ \|\,\mathbf{A}\,\|$	Módulo de un escalar por un vector
ix.	$1\,\mathbf{A} = \mathbf{A}$	Elemento neutro para la multiplicación.
x.	$0\,\mathbf{A} = \mathbf{0}$	(Vector nulo)

Si $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ y $\alpha > 0$, entonces $\alpha\,\mathbf{A}$ tiene la dirección de **A**.

Si $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ y $\alpha < 0$, entonces $\alpha\,\mathbf{A}$ tiene dirección opuesta a **A**.

Si $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ó $\alpha = 0$ (o ambos), entonces $\alpha\,\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

6.- Combinación lineal de vectores.

Sean **A**, **B**, ..., **W** vectores *n* dimensionales y α, β, ..., ω escalares. La expresión $\alpha\,\mathbf{A} + \beta\,\mathbf{B} + \ldots + \omega\,\mathbf{W}$ es llamada combinación lineal de los vectores dados.

7.- Bisectriz de dos vectores.

Sean $\mathbf{A} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = b_x\,\mathbf{i} + b_y\,\mathbf{j} + b_z\,\mathbf{k}$. La bisectriz de los dos vectores dados es el vector *C*, cuya dirección es la misma que el vector suma $\mathbf{U}_A + \mathbf{U}_B$, donde $\mathbf{U}_A$ y $\mathbf{U}_B$ son los vectores unitarios en la dirección de **A** y **B** respectivamente.

8.- Definición del producto escalar (Producto punto ó producto interno).

Producto escalar: Producto de dos vectores que da un escalar.

Sean $\mathbf{A} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = b_x\,\mathbf{i} + b_y\,\mathbf{j} + b_z\,\mathbf{k}$. El producto escalar de los vectores **A** y **B**, denotado por **A . B** se define como:

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z$.

8.1.- Resumen de propiedades del producto escalar en el espacio.

Sean **A**, **B** y **C** vectores no nulos en el espacio y α un escalar. Se verifica:

1.- i.- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ Propiedad conmutativa (Simetría).

ii.- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ Propiedad distributiva.

iii.- $\alpha\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\alpha\,\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\alpha\,\mathbf{B})$

iv.- $\mathbf{0} \cdot \mathbf{B} = 0$

v.- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \|\,\mathbf{A}\,\|^2$

2.- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \|\,\mathbf{A}\,\|\ \|\,\mathbf{B}\,\|\ \cos\theta$, siendo θ en ángulo entre **A** y **B**.

3.- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ si y sólo si **A** y **B** son ortogonales.

8.2.- Angulo entre dos vectores.

Si θ es el ángulo entre dos vectores no nulos **A** y **B**, entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|}$$

8.3.- Vectores paralelos.

Dos vectores **A** y **B** son paralelos si uno de los vectores es múltiplo escalar del otro, esto es, **A** = α **B**.

8.4.- Vectores ortogonales (perpendiculares).

Dos vectores **A** y **B** son ortogonales (o perpendiculares) si y sólo si **A . B** = 0.

8.5.- Proyección de un vector sobre otro vector.

$\mathrm{Proy}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}$ es la proyección escalar del vector **A** en la dirección de **B**.
$\|\mathrm{Proy}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}\|$ es la componente del vector **A** en la dirección de **B** o la proyección escalar del vector **A** en la dirección de **B**.
Si θ es el ángulo entre **A** y **B**, entonces:
1.- La proyección escalar del vector **A** sobre el vector ***B*** es
$\|\mathrm{Proy}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}\| \cos\theta$

$$\|\mathrm{Proy}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}\| = \frac{\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|}$$

2.- El vector proyección del vector **A** sobre el vector **B** es:

$$\mathrm{Proy}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = \|\mathbf{A}\|\cos\theta\,\frac{\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|}$$

$$\mathrm{Proy}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = \left(\frac{\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|}\right)\frac{\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|}$$

$$\mathrm{Proy}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = \left(\frac{\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|^2}\right)\mathbf{B}$$

.La proyección de un vector sobre otro vector no cumple la propiedad conmutativa.

9.- Definición del producto vectorial (Producto cruz).

Producto vectorial: Multiplicación de dos vectores cuyo resultado es un vector.
Sean **A** = a_x **i** + a_y **j** + a_z **k** y **B** = b_x **i** + b_y **j** + b_z **k**.. El producto vectorial de los vectores **A** y **B**, denotado por **A** × **B** se define como:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

A × **B** = $(a_y\, b_z - b_y\, a_z)$ **i** + $(a_x\, b_z - b_x\, a_z)$ **j** + $(a_x\, b_y - b_x\, a_y)$ **k**
(Nótese el signo menos ante la componente **j**).
La dirección del vector producto es perpendicular a **A** y **B** y su sentido es el de avance de un sacacorchos que gire de **A** hacia **B**.

9.1.- Propiedades algebraicas del producto vectorial.

Sean **A**, **B** y **C** vectores no nulos en el espacio y α y β escalares. Se verifica:
i.- **A** × **B** = – (**B** × **A**)
ii.- **A** × **A** = **0**
iii.- α **A** × β **B** = $\alpha\,\beta$ (**A** × **B**)
iv.- **A** × **0** = **0** × **A** = **0**
v.- **A** × (**B** + **C**) = **A** × **B** + **A** × **C** Propiedad distributiva.
vi.- **A . (B** × **C)** = (**A** × **B**) **. C**

9.2.- Propiedades geométricas del producto vectorial.

Sean **A** y **B** vectores no nulos en el espacio y θ el ángulo entre **A** y **B**. Se verifica:
i.- **A** × **B** es ortogonal tanto a **A** como a **B**.
ii.- $\|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\| \operatorname{sen}\theta$
iii.- **A** × **B** = 0 si y sólo si **A** y **B** son paralelos.
iv.- $\dfrac{\|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\|}{\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}} = \tan\theta$

9.3.- Vectores paralelos.

Dos vectores **A** y **B** son paralelos si **A** × **B** = **0**.

10.- Aplicación de los vectores a la geometría analítica.

10.1.- Triángulo rectángulo.

Enfoque usando distancia entre dos puntos.

Tres puntos *A*, *B* y *C* en R^3 forman un triángulo rectángulo si sus lados cumplen el Teorema de Pitágoras, esto es, el cuadrado de la longitud del segmento mayor es igual a la suma del cuadrado de la longitud de los dos segmentos menores.

Enfoque usando vectores.

Tres puntos *A*, *B* y *C* en R^3 forman un triángulo rectángulo si al definir los tres vectores posibles entre ellos (sin tomar en cuenta los opuestos), un par de dichos vectores resulta perpendicular.

10.2.- Área del paralelogramo.

Sean **A** y **B** vectores no nulos en R^3 y lados adyacentes de un paralelogramo. El área del paralelogramo viene dada por:
Área = $\|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\|$

10.3.- Área del triángulo.

Sean **A** y **B** vectores no nulos en R^3 y lados adyacentes de un triángulo. El área del triángulo viene dada por: $\text{Area} = \tfrac{1}{2}\|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\|$.

11.- Producto triple escalar (Producto mixto).

Sean **A** = a_x **i** + a_y **j** + a_z **k**, **B** = b_x **i** + b_y **j** + b_z **k** y **C** = c_x **i** + c_y **j** + c_z **k**. El producto triple escalar de los vectores **A**, **B** y **C**, denotado por **A . (B** × **C)** se define como:

$$\mathbf{A}.\,(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

12.- Volumen del paralelepípedo.

Sean **A**, **B** y **C** vectores no nulos en R^3 y lados adyacentes de un paralelepípedo. El volumen del paralelepípedo viene dado por:
Volumen = | **A . (B** × **C)** |

13.- Vectores coplanares.

Tres vectores **A**, **B** y **C** en R^3 son coplanares si su producto triple escalar es nulo **A . (B** × **C)** = 0.

14.- Volumen del tetraedro.

Sean **A**, **B** y **C** vectores no nulos en R^3 y lados adyacentes de un tetraedro. El volumen del tetraedro viene dado por: $\text{Volumen} = \tfrac{1}{6}\left|\mathbf{A}.\,(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\right|$.

15.- Volumen del prisma triangular.

Sean **A**, **B** y **C** vectores no nulos en R^3. **A**, **B** y **C** son los lados adyacentes de un prisma triangular si uno de los vectores es perpendicular a los otros dos. El volumen del prisma triangular viene dado por:
$\text{Volumen} = \tfrac{1}{2}\left|\mathbf{A}.\,(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\right|$.

16.- Dependencia e independencia lineal de vectores.

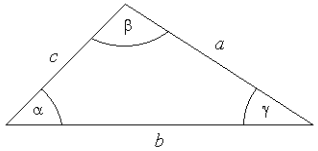
Un conjunto de *m* vectores **A**, **B**, ..., **W** es llamado un conjunto linealmente dependiente si al menos uno de los vectores puede ser representado como una combinación lineal de los otros (con escalares que pueden ser iguales a cero o no). El conjunto es llamado linealmente independiente si ninguno de los vectores puede ser representado en esa forma.
- Dos vectores forman un conjunto linealmente dependiente si y sólo si su producto vectorial es el vector nulo.
- Tres vectores forman un conjunto linealmente dependiente si y sólo si su producto triple escalar es cero.

Criterio de dependencia lineal:

Un conjunto de vectores *n* dimensionales **A**, **B**, ..., **W** es linealmente dependiente si y sólo si la ecuación vectorial α **A** + β **B** + … + ω **W** = **0** tiene como solución un conjunto de escalares α, β, ..., ω, no todos cero (por lo menos uno diferente de cero).
- Dos vectores en R^3 que forman un conjunto linealmente dependiente son colineales; esto es, si hacemos coincidir sus puntos iniciales, ellos se encuentran en la misma línea.
- Tres vectores en R^3 que forman un conjunto linealmente dependiente son coplanares; esto es, si hacemos coincidir sus puntos iniciales, ellos se encuentran en el mismo plano.

17.- Ley de los senos y de los cosenos.

En estas fórmulas *a*, *b* y *c* representan las medidas de los lados de un triángulo; α, β y γ denotan las medidas de los ángulos opuestos a los lados de medidas *a*, *b* y *c* respectivamente.



18.- Ley de los senos.

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \qquad \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

19.- Ley de los cosenos.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos\beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma$

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**.
Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**
e-mail: **medinawj@gmail.com**
Twitter: **@medinawj**

El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:
https://www.tutoruniversitario.com/ Maturín, diciembre de 2024.