MATRICES Y DETERMINANTES.

1.- Matriz.

Una matriz A de tamaño $m\times n$ (o de orden $m\times n$) es un arreglo rectangular formado por $m\times n$ números dispuestos en m filas y n columnas.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Los términos *fila* y *renglón* se utilizan indistintamente.
Por lo general, las matrices se denotarán con letras mayúsculas.
En algunos libros las matrices se presentan dentro de paréntesis cuadrados en lugar de paréntesis redondos.

2.- Elementos de una matriz.

Cada uno de los números que constituyen la matriz se denomina *elemento* (o entrada) de la matriz. En general el elemento que se encuentre en la fila i y la columna j se llama "elemento ij" y se simboliza con a_{ij}, b_{ij},…y así sucesivamente.
La notación de doble subíndice es conveniente para identificar la posición de un elemento de la matriz. El primer subíndice i siempre designa el número de la fila en el cual está el elemento. El segundo subíndice j designa la columna.

3.- Dimensión de una matriz.

Una matriz A se representa en forma abreviada como $A = (a_{ij})_{m\times n}$, o simplemente $A = (a_{ij})$ donde a_{ij} es un elemento típico de la matriz. Los subíndices de los paréntesis indican el número de filas, m, y de columnas n, de la matriz, y se llaman **dimensiones** de la matriz.

4.- Matriz nula.

Una *matriz nula* es una matriz donde todos los elementos son iguales a cero (0).

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

El símbolo O se utiliza para denotar la matriz nula. La matriz nula tiene propiedades similares al cero.

5.- Matriz transpuesta.

La transpuesta de una matriz implica transformar sus filas en columnas y columnas en filas.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz transpuesta se puede hallar a una matriz de cualquier orden.

6.- Elementos homólogos de dos matrices.

Al elemento a_{ij} de una matriz A y al elemento b_{ij} de la matriz B se les dice elementos homólogos. En general, a_{ij} es homólogo de b_{ij}.

7.- Matrices iguales.

Se dice que dos matrices son iguales si tienen el mismo orden y los elementos homólogos (igualmente ubicados) son iguales.

8.- Matriz fila.

Un conjunto horizontal de elementos se llama *matriz fila* (o matriz renglón).

$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \dots \quad a_{1n})$

9.- Matriz columna.

Un conjunto vertical de elementos se llama matriz columna (o vector columna).

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

10.- Matriz cuadrada.

Es la matriz que tiene igual número de filas que de columnas ($m = n$).

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A la diagonal que contiene los elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ se le llama *diagonal principal* de la matriz.

11.- Tipos especiales de matrices cuadradas.

11.1.- Matriz simétrica.

Una *matriz simétrica* es aquella matriz cuadrada donde $a_{ij} = a_{ji}$

11.2.- Matriz diagonal.

Una *matriz diagonal* es una matriz cuadrada donde todos los elementos fuera de la diagonal principal son iguales a cero.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

11.3.- Matriz identidad. Una *matriz identidad* es una matriz diagonal donde todos los elementos sobre la diagonal principal son iguales a 1.

$$A_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

El símbolo I se utiliza para denotar la matriz identidad. La matriz identidad tiene propiedades similares a la unidad.

11.4.- Matriz escalar. Una matriz A es escalar si es diagonal y todos los elementos diagonales son iguales.

11.5.- Matriz triangular superior.

Una *matriz triangular superior* es aquella matriz cuadrada donde todos los elementos por debajo de la diagonal principal son cero.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

11.6.- Matriz triangular inferior.

Una *matriz triangular inferior* es aquella matriz cuadrada donde todos los elementos por encima de la diagonal principal son cero.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Una matriz diagonal es tanto triangular superior como triangular inferior.

11.7.- Matriz bandeada.

Una *matriz bandeada* tiene todos los elementos iguales a cero con la excepción de una banda centrada sobre la diagonal principal.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz anterior tiene un ancho de banda de 3 y se le da un nombre especial: *matriz tridiagonal*.

12.- Opuesta de una matriz.

Dada la matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, se tiene que la matriz $D = (- a_{ij})_{m\times n}$ se llama matriz opuesta de A y se denota –A.

13.- Suma de matrices.

Dadas las matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$, se llama suma de A y B, y se simboliza $A + B$, a la matriz: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$. Es decir, $A + B$ se obtiene sumando los elementos homólogos de A y B.

14.- Diferencia de dos matrices.

Dadas las matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$, se tiene que a la diferencia de A y B se denota A – B y se define como $A - B = A + (-B) = [a_{ij} + (-b_{ij})]_{m\times n}$. Es decir, A – B se obtiene sumando la matriz A con la matriz opuesta de B.

15.- Propiedades de la suma de matrices.

Si A, B y C son matrices $m\times n$, se verifica que

12.1.- $A + B = B + A$ (Propiedad conmutativa)
12.2.- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Propiedad asociativa)
12.3.- $A + 0 = 0 + A = A$ (Elemento neutro)
12.4.- Cualquiera que sea A, existe D tal que $A + D = 0$ (Elemento opuesto)

16.- Producto de un número real por una matriz.

Si α es un número real y $A = (a_{ij})_{m\times n}$, entonces el producto de α por A es la matriz $m\times n$ que se obtiene de multiplicar cada elemento de A por α, es decir $\alpha A = (\alpha\, a_{ij})_{m\times n}$

17.- Propiedades del producto de un número real por una matriz.

Si α y β son dos números reales y A y B matrices $m\times n$, se cumple que

14.1.- αA es una matriz $m\times n$ **14.2**.- $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$
14.3.- $1 A = A$ **14.4**.- $\alpha (\beta A) = \alpha \beta A$
14.5.- $(-1) A = -A$ **14.6**.- $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$

18.- Producto de matrices.

La condición para que esté definido el producto entre dos matrices es que el número de columnas del primer factor coincida con el número de filas del segundo factor.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \end{pmatrix}$$

La matriz resultante de la multiplicación tiene igual número de filas que el primer factor e igual número de columnas que el segundo factor. La multiplicación de matrices no es conmutativa.

19.- Matriz involutiva.

Una matriz A de $n\times n$ tal que $A^2 = I$ se llama involutiva.

20.- Propiedades del producto de matrices.

Si A, B y C son matrices para las cuales están definidas las operaciones indicadas, se verifica:

16.1.- $0 \times A = 0$
16.2.- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ (Propiedad asociativa)
16.3.- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ (Propiedad distributiva por la izquierda del producto respecto a la suma)
16.4.- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$ (Propiedad distributiva por la derecha del producto respecto a la suma)

21.- Matriz simétrica oblicua.

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ para la cual $A^T = -A$, esto es $a_{ij} = -a_{ji}$, se llama *matriz simétrica oblicua*.

22.- Aumentación de matrices.

Una matriz es aumentada al agregar una columna (o columnas) a la matriz original. Por ejemplo, suponga que tenemos una matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Se puede aumentar esta matriz A con una matriz identidad para obtener una matriz aumentada.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tal expresión es útil cuando debe ejecutarse un conjunto de operaciones idénticas sobre dos matrices. Así podemos realizar las operaciones sobre una sola matriz aumentada, en lugar de hacerlo sobre dos matrices individuales.

23.- Determinantes.

En el conjunto de matrices cuadradas, se define una función que a cada matriz A le hace corresponder un número el cual se llama determinante de A y se simboliza $|A|$. Si A es de orden n, decimos que $|A|$ es de orden n.

24.- Algunas consideraciones importantes sobre determinantes.

24.1.- Si A es de orden 1, es decir, $A = (a_{11})$, el determinante de A es $|A| = a_{11}$

24.2.- Si A es de orden 2, es decir $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, el determinante de A es la diferencia de dos términos, cada uno de los cuales es el producto de las diagonales, es decir, $|A| = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$

24.3.- Si A es de orden 3, el determinante de A es la suma de tres términos, cada uno de los cuales es el producto: $(a_{1j})^{1+j}\, M_{1j}$ (j = 1, 2, 3), donde M_{1j} es el determinante de la matriz que resulta de suprimir la fija 1 y la columna 1.

24.4.- En general, si A es de orden n, el determinante de A es la suma de n términos, cada uno de los cuales es el producto de $(a_{1j})^{1+j}\, M_{1j}$ (j = 1, 2, 3, …, n), donde M_{1j} es el determinante de la matriz que resulta al suprimir la fila 1 y la columna j.

24.5.- Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n\times n$ triangular superior o inferior. Entonces $|A| = a_{11}.a_{22}.a_{33}\ldots a_{nn}$.

24.6.- Sean A y B dos matrices de $n\times n$. Entonces:
$|A.B| = |A|\,|B|$ y $|A + B| \neq |A| + |B|$.

24.7.- Una matriz y su traspuesta tienen el mismo determinante.

24.8.- Si cualquier fila o columna de A es un vector cero, entonces $|A| = 0$.

24.9.- El intercambio de cualquier dos filas (o columnas) distintas de A tiene el efecto de multiplicar $|A|$ por -1.

24.10.- Si A tiene dos filas o columnas iguales, entonces $|A| = 0$.

24.11.- Si una fila de A es un múltiplo escalar de otra fila, entonces $|A| = 0$.

24.12.- Si se suma un múltiplo escalar de una fila de A a otra fila de A, entonces el determinante no cambia.

25.- La regla de Sarrus.

Se aplica para calcular determinantes de matrices cuya dimensión es 3×3. Se duplican la primera y segunda columna de la matriz y se procede como sigue:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$|A| = (a_{11}.\, a_{22}.\, a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}) - (a_{31}.\, a_{22}.\, A_{13} + a_{32}.a_{23}.a_{11} + a_{33}.a_{21}.a_{12})$

26.- Sub matriz.

La matriz que se obtiene suprimiendo la i-ésima fila y la j-ésima columna de una matriz A se llama submatriz ij-ésima y se designa por S_{ij}.

27.- Elementos menores.

El determinante M_{ij} se llama el menor del elemento a_{ij} en $|A|$, y se define: $M_{ij} = |S_{ij}|$.

28.- Cofactores.

$|A| = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} C_{i\alpha}$. La cantidad $C_{i\alpha}$ se llama cofactor de $a_{i\alpha}$. Para toda matriz cuadrada $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

29.- Matriz adjunta.

Sea A una matriz cuadrada $n\times n$, y sea C_{ij} el cofactor de a_{ij} en $|A|$. Entonces la matriz $(C_{ij})^T$ se llama adjunta de A (adj A).

30.- Matriz singular.

Si una matriz A es cuadrada, y $|A| = 0$, entonces la matriz A se llama matriz singular.

31.- Matriz inversa.

Si una matriz A es cuadrada y no singular, existe otra matriz A^{-1}, llamada la *inversa* de A, para la cual $A\times A^{-1} = I$.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, para determinar su inversa, se deben realizar operaciones sobre la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ con el objetivo: } \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & 1 & 0 & a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & 1 & a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{array}\right)$$

La matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}$ es la inversa de la matriz A.

32.- Matriz inversa en función de la adjunta.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$$

33.- Sistema de ecuaciones *m×n*.

Si indicamos con m la cantidad de ecuaciones y con n la cantidad de incógnitas, un sistema de m ecuaciones con n incógnitas (llamado sistema $m\times n$) puede expresarse del siguiente modo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & \text{primera ecuación} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & \text{segunda ecuación} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m & \text{enésima ecuación} \end{cases}$$

Donde

- Los a_{ij}, llamados coeficientes y los b_i, llamados términos independientes, son números reales.
- Los símbolos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ representan las incógnitas del sistema.

34.- Sistema homogéneo y no homogéneo.

Un sistema $m\times n$ se llama homogéneo si todos sus términos independientes son nulos; en caso contrario, lo llamamos no homogéneo.

35.- Sistema compatible determinado y no determinado e incompatible.

Un sistema es compatible si tiene solución; de lo contrario, si carece de solución es incompatible.

Un sistema compatible puede tener:

- Única solución (en este caso se denomina compatible determinado).
- Infinitas soluciones (en este caso es compatible indeterminado).

Un sistema escalonado $m\times n$, compatible, es:

Determinado: $m = n$ (tantas ecuaciones como incógnitas).

Indeterminado: $m < n$ (menos ecuaciones que incógnitas).

36.- Sistemas equivalentes.

Dos sistemas se llaman equivalentes si tiene la misma solución general.

37.- Teorema de equivalencia de sistemas.

Se obtiene un sistema equivalente si se efectúan cualquiera de las siguientes transformaciones (llamadas operaciones elementales).

i- Intercambiar dos ecuaciones de un sistema (Tipo I).

ii.- Multiplicar una ecuación por un número distinto de cero (Tipo II).

iii.- Reemplazar una ecuación por la suma de ésta con otra que se multiplicó por un número (Tipo III).

38.- Expresión matricial de un sistema.

Cualquier sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Puede expresarse mediante la ecuación matricial $A\ X = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Las matrices A, X y B reciben, respectivamente, los nombres de matriz de los coeficientes, vector de las incógnitas y vector de los términos independientes del sistema.

A la matriz $A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ la llamamos *matriz ampliada de los coeficientes* (matriz ampliada), la cual la formamos con las primeras columnas con la matriz de coeficientes y la última columna es el vector de los términos independientes.

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**.

Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**

e-mail: **medinawj@gmail.com**

Twitter: **@medinawj**

El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección: **https://www.tutoruniversitario.com/** Maturín, diciembre de 2024.