TÉCNICAS DE INTEGRACION.

1.- Integración por partes. La integración por partes resulta útil cuando el integrando está conformado por el producto de funciones inversas, logarítmicas, algebraicas, trigonométricas y exponenciales.

1.1 Fórmula del método de integración por partes: $\int u\,v'\,dx = u\,v - \int v\,u'\,du$

1.2 Esquema para usar integración por partes $\int u\,v'\,dx$:

i.- Tómese como u aquella porción del integrando que tiene por derivada u' una función más simple que la propia u.

ii.- Tómese como v' la porción más complicada del integrando que puede integrarse "fácilmente".

1.3.- Sugerencias para el uso de integraciones por partes sucesivas (iteradas o cíclicas).

i.- Tener cuidado de *no conmutar* las elecciones de u y v' en sucesivas aplicaciones.

ii.- Después de cada aplicación, vigilar la aparición de un *múltiplo constante* de la integral original.

1.4 Regla nemotécnica. La elección conveniente de u (según el orden de aparición en el integrando) es: **I**nversa > **L**ogaritmica > **A**lgebraica > **T**rigonométrica > **E**xponencial (ILATE).

Nota: El método de integración por partes suele conducir a integrales inmediatas, con cambio de variables, en fracciones simples, por sustitución trigonométrica ó potencias trigonométricas.

2.- Método de Completar el cuadrado. $x^2 + bx + c = (x+\frac{1}{2}b)^2 + [\,c - (\frac{1}{2}b)^2\,]$ $\quad u = x + \frac{1}{2}b$; $du = dx$

3.- Sustituciones trigonométricas.

3.1.- $\int f(\sqrt{a^2-u^2})\,du$: tómese $u = a$ sen θ

3.2.- $\int f(\sqrt{a^2+u^2})\,du$: tómese $u = a\tan\theta$ 3.3.- $\int f(\sqrt{u^2-a^2})\,du$: tómese $u = a\sec\theta$

Nota: El método de integración mediante sustitución trigonométrica suele conducir a integrales inmediatas, con cambio de variable ó de expresiones trigonométricas.

4.- Integrales de expresiones trigonométricas.

4.1.- Reglas de las potencias para integrales trigonométricas. Para $n \neq -1$:

$$\int \operatorname{sen}^n x(\cos x)\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x}{n+1} + C \qquad \int \cos^n x(-\operatorname{sen} x)\,dx = \frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C$$

$$\int \sec^n x(\sec x\tan x)\,dx = \frac{\sec^{n+1} x}{n+1} + C \qquad \int \tan^n x(\sec^2 x)\,dx = \frac{\tan^{n+1} x}{n+1} + C$$

4.2.- Integrales que contienen seno y coseno.

i.- Si la potencia del seno es impar y positiva, conservar un factor seno y convertir los demás en cosenos. Aplicar el cambio de variable $z = \cos x$. Desarrollar e integrar.

$$\int \operatorname{sen}^{\overbrace{2k+1}^{\text{Impar}}} x\cos^n x\,dx = \int \operatorname{sen}^{2k} x\cos^n x(\operatorname{sen} x)\,dx = \int \underbrace{(\operatorname{sen}^2 x)^k}_{\text{Convertiren cosenos}} \cos^n x(\operatorname{sen} x)\,dx$$

$$= \int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x(\operatorname{sen} x)\,dx$$

ii.- Si la potencia del coseno es impar y positiva, conservar un factor coseno y convertir los demás en senos. Aplicar el cambio de variable z = sen x. Desarrollar e integrar.

$$\int \operatorname{sen}^m x\cos^{\overbrace{2k+1}^{\text{Impar}}} x\,dx = \int \operatorname{sen}^m x\cos^{2k} x(\cos x)\,dx = \int \operatorname{sen}^m x \underbrace{(\cos^2 x)^k}_{\text{Convertiren senos}} (\cos x)\,dx = \int \operatorname{sen}^m x(1-\operatorname{sen}^2 x)^k(\cos x)\,dx$$

iii.- Si las potencias de ambos, seno y coseno, son impares, positivas y diferentes, aplicar i ó ii al de la menor potencia. Si se aplica el procedimiento al de la mayor potencia también se obtiene el resultado de la integral, pero con mayor cantidad de operaciones.

iv.- Si las potencias de ambos, seno y coseno, son pares, positivas y diferentes, usar repetidamente las identidades $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta$, $\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$.

v.- Si las potencias de ambos, seno y coseno, son positivas e iguales, usar la identidad $\operatorname{sen} x\cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$.

Si las potencias de ambos, seno y coseno son impares e iguales, también funciona indistintamente i ó ii con igual cantidad de operaciones.

Si las potencias de ambos, seno y coseno son pares e iguales, también funciona iv, pero con mayor cantidad de operaciones.

vi.- Si no ocurre ninguna de las cinco situaciones precedentes, intentar reescribir el integrando en términos de secantes, tangentes, cosecantes y cotangentes.

4.3.- Integrales que contienen secante y tangente.

i.- Si existen factores secante y la potencia de la tangente es impar y positiva, conservar un factor secante por tangente y pasar los demás a secantes. Aplicar el cambio de variable $z = \sec x$. Desarrollar e integrar.

$$\int \sec^m x\tan^{\overbrace{2k+1}^{\text{impar}}} x\,dx = \int \sec^{m-1} x\tan^{2k} x(\sec x\tan x)\,dx = \int \sec^{m-1} x \underbrace{(\tan^2 x)^k}_{\text{Convertiren secantes}} (\sec x\tan x)\,dx$$

$$\int \sec^{m-1} x(\sec^2 x - 1)^k(\sec x\tan x)\,dx$$

Si además la potencia de la secante es par, positiva y de potencia menor a la potencia de la tangente, aplicar ii, la cual conduce a menor cantidad de operaciones.

ii.- Si la potencia de la secante es par y positiva, conservar un factor secante cuadrado y pasar las demás a tangentes. Aplicar el cambio de variable $z = \tan x$. Desarrollar e integrar.

$$\int \sec^{\overbrace{2k}^{\text{par}}} x\tan^n x\,dx = \int \sec^{2k-2} x\tan^n x(\sec^2 x)\,dx = \int \underbrace{(\sec^2 x)^{k-1}}_{\text{Convertiren tangentes}} \tan^n x(\sec^2 x)\,dx$$

$$= \int (1+\tan^2 x)^{k-1}\tan^n x(\sec^2 x)\,dx$$

Si existen factores tangente y la potencia de la tangente es impar, positiva y de potencia menor a la potencia de la secante, aplicar i, la cual conduce a menor cantidad de operaciones.

iii.- Si no hay factores secante y la potencia de la tangente es par y positiva, convertir un factor $\tan^2 x$ en secantes. Después desarrollar y repetir el proceso si fuese necesario.

$$\int \tan^n x\,dx = \int \tan^{n-2} x \underbrace{(\tan^2 x)}_{\text{Convertiren secantes}} dx = \int \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1)\,dx = \int \tan^{n-2} x(\sec^2 x)\,dx - \int \tan^{n-2} x\,dx$$

iv.- Si no hay factores tangente y la potencia de la secante es impar y positiva, aplicar integración por partes: $\int \sec^{2k+1} dx = \int \sec^{2k-1} x(\sec^2 x)\,dx$. $u = \sec^{2k-1} x$, $dv = \sec^2 x\,dx$

v.- Si no ocurre ninguna de las cuatro situaciones precedentes, intentar reescribir el integrando en términos de senos y cosenos.

4.4.- Integrales que contienen cosecante y cotangente.

i.- Si existen factores cosecante y la potencia de la cotangente es impar y positiva, reservar un factor cosecante por cotangente y pasar los demás a cosecantes. Aplicar el cambio de variable $z = \csc x$. Desarrollar e integrar.

$$\int \csc^m x\cot^{\overbrace{2k+1}^{\text{impar}}} x\,dx = \int \csc^{m-1} x\cot^{2k} x(\csc x\cot x)\,dx = \int \csc^{m-1} x \underbrace{(\cot^2 x)^k}_{\text{Convertiren cosecantes}} (\csc x\cot x)\,dx$$

$$= \int \csc^{m-1} x(\csc^2 x - 1)^k(\csc x\cot x)\,dx$$

Si además la potencia de la cosecante es par, positiva y de potencia menor a la potencia de la cotangente, aplicar ii, la cual conduce a menor cantidad de operaciones.

ii.- Si la potencia de la cosecante es par y positiva, reservar un factor cosecante cuadrado y pasar las demás a cotangentes. Aplicar el cambio de variable $z = \cot x$. Desarrollar e integrar.

$$\int \csc^{\overbrace{2k}^{\text{par}}} x\cot^n x\,dx = \int \csc^{2k-2} x\cot^n x(\csc^2 x)\,dx = \int \underbrace{(\csc^2 x)^{k-1}}_{\text{Convertiren cotangentes}} \cot^n x(\csc^2 x)\,dx$$

$$= \int (1+\cot^2 x)^{k-1}\cot^n x(\csc^2 x)\,dx$$

Si además la potencia de la cotangente es impar, positiva y de potencia menor a la potencia de la cosecante, aplicar i, la cual conduce a menor cantidad de operaciones.

iii.- Si no hay factores cosecante y la potencia de la cotangente es par y positiva, convertir un factor $\cot^2 x$ en cosecantes. Desarrollar y repetir el proceso si fuese necesario.

$$\int \cot^n x\,dx = \int \cot^{n-2} x \underbrace{(\cot^2 x)}_{\text{Convertiren cosecantes}} dx = \int \cot^{n-2} x(\csc^2 x - 1)\,dx = \int \cot^{n-2} x(\csc^2 x)\,dx - \int \cot^{n-2} x\,dx$$

iv.- Si no hay factores cotangente y la potencia de la cosecante es impar y positiva, aplicar integración por partes.

$\int \csc^{2k+1} dx = \int \csc^{2k-1} x (\csc^2 x)\, dx \cdot\ u = \csc^{2k-1} x,\ dv = \csc^2 x\, dx$

v.- Si no ocurre ninguna de las cuatro situaciones precedentes, intentar reescribir el integrando en términos de senos y cosenos.

4.5.- Integrales que contienen producto de senos y cosenos de ángulos diferentes. Para resolver integrales de la forma ∫ sen ($a\,x$) sen ($b\,x$) $d\,x$, ∫ sen ($a\,x$) cos ($b\,x$) $d\,x$ y ∫ cos ($a\,x$) cos ($b\,x$) $d\,x$, utilizar las siguientes identidades:

$$\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi = \tfrac{1}{2}[\cos(\theta-\phi) - \cos(\theta+\phi)] \qquad \operatorname{sen}\theta \cos\phi = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(\theta-\phi) + \operatorname{sen}(\theta+\phi)]$$

$$\cos\theta \cos\phi = \tfrac{1}{2}[\cos(\theta-\phi) + \cos(\theta+\phi)]$$

5.- Fracciones simples (Separación en fracciones parciales). La integración por fracciones simples resulta útil cuando el integrando está conformado por el cociente de polinomios.

Descomposición de $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ en fracciones simples.

i. Si $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ es una fracción racional impropia [esto es, si el grado de D (x) no es mayor que el de N (x)], dividir N (x) por D (x) para obtener $\dfrac{N(x)}{D(x)} = C(x) + \dfrac{N_1(x)}{D(x)}$ y aplicar las reglas 1, 2, 3 y 4.

ii. Descomponer completamente D (x) en factores de la forma $(p\,x + q)^n$, $(x^2 + a^2)^n$ y $[(x \pm b)^2 + a^2]^n$.

Regla 1. Factores lineales que no se repiten. Por cada factor de la forma $p_i\,x + q_i$ la descomposición en fracciones simples ha de incluir la siguiente suma de n fracciones:

$$\frac{N_1(x)}{(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)\ldots(p_nx+q_n)} = \frac{A_1}{p_1x+q_1} + \frac{A_2}{p_2x+q_2} + \ldots + \frac{A_n}{p_nx+q_n}$$

Integral útil: $\displaystyle\int \frac{dx}{p_1x+q_1} = \frac{1}{p_1}\ln(p_1x+q_1) + C$

Regla 2. Factores lineales que se repiten. Por cada factor de la forma $(p\,x + q)^n$ la descomposición en fracciones simples ha de incluir la siguiente suma de n fracciones:

$$\frac{N_1(x)}{(px+q)^n} = \frac{A_1}{px+q} + \frac{A_3}{(px+q)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(px+q)^n} \qquad \int \frac{dx}{(px+q)^n} = \frac{-1}{p(n-1)(px+q)^{n-1}}$$

Regla 3. Factores cuadráticos que no se repiten. Por cada factor de la forma $x^2 + a_i^2$ y $(x \pm b_i)^2 + a_i^2$ la descomposición en fracciones simples ha de incluir la suma de las siguientes fracciones:

$$\frac{N_1(x)}{(x^2+a_1^2)(x^2+a_2^2)\ldots(x^2+a_n^2)} = \frac{B_1x+C_1}{x^2+a_1^2} + \frac{B_2x+C_2}{x^2+a_2^2} + \ldots + \frac{B_nx+C_n}{x^2+a_n^2}$$

$$\frac{N_1(x)}{[(x\pm b_1)^2+a_1^2][(x\pm b_2)^2+a_2^2]\ldots[(x\pm b_n)^2+a_n^2]} = \frac{B_1(x\pm b_1)+C_1}{(x\pm b_1)^2+a_1^2} + \frac{B_2(x\pm b_2)+C_2}{(x\pm b_2)^2+a_2^2} + \ldots + \frac{B_n(x\pm b_n)+C_n}{(x\pm b_n)^2+a_n^2}$$

Integrales útiles: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C$

Regla 4. Factores cuadráticos repetidos. Por cada factor de la forma $(x^2 + a^2)^n$ y $[(x \pm b)^2 + a^2]^n$ la descomposición en fracciones simples ha de incluir la suma de las siguientes fracciones:

$$\frac{N_1(x)}{(x^2+a^2)^n} = \frac{B_1x+C_1}{x^2+a^2} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+a^2)^2} + \ldots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+a^2)^n}$$

$$\frac{N_1(x)}{[(x\pm b)^2+a^2]^n} = \frac{B_1(x\pm b)+C_1}{(x\pm b)^2+a^2} + \frac{B_2(x\pm b)+C_2}{[(x\pm b)^2+a^2]^2} + \ldots + \frac{B_n(x\pm b)+C_n}{[(x\pm b)^2+a^2]^n}$$

6.- Esquema para resolver la ecuación fundamental.

6.1.- Factores lineales.

i.- Sustituir en x las raíces de los distintos factores lineales que aparecen en la ecuación fundamental.

ii.- Si hay factores lineales repetidos, usar los coeficientes ya determinados en la parte i para reescribir la ecuación fundamental. A continuación sustituir en x *otros* valores.

6.2.- Factores cuadráticos.

i.- Desarrollar la ecuación fundamental.

ii.- Agrupar términos según las potencias de x.

iii.- Igualar los coeficientes de las potencias correspondientes de x, obteniendo así un sistema de ecuaciones lineales (Aplicación del Método de los Coeficientes Indeterminados).

iv.- Resolver el sistema lineal.

7.- Funciones racionales del seno y del coseno.

Para integrales de la forma ∫ f (sen x , cos x) $d\,x$ donde f es una función racional:

7.1.- Hágase $z = \tan(\tfrac{1}{2}x)$, con lo cual: $\cos x = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}$, $\operatorname{sen} x = \dfrac{2z}{1+z^2}$, $dx = \dfrac{2\,dz}{1+z^2}$.

7.2.- Si f (– sen x , cos x) = – f (sen x, cos x), hágase z = cos x.

7.3.- Si f (sen x , – cos x) = – f (sen x, cos x), hágase z = sen x.

7.4.- Si f (– sen x , – cos x) = f (sen x, cos x) ó f (sen x , cos x) = f (tan x), hágase z = tan x, con lo cual:

$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+z^2}$, $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{z^2}{1+z^2}$, $dx = \dfrac{dz}{1+z^2}$

Nota: El método de integración de funciones racionales de seno y coseno suele conducir a integrales inmediatas, con cambio de variables ó en fracciones simples.

8.- Integrales de funciones irracionales.

8.1.- Una expresión que contiene solamente potencias fraccionarias de x puede transformarse en forma racional mediante la sustitución $x = z^n$ siendo n el mínimo común múltiplo de los exponentes fraccionarios de x.

8.2.- Una expresión que contiene solamente potencias fraccionarias de $a\,x + b$ $\int f[\sqrt[n]{(ax+b)^m}]\,dx$ puede transformarse en forma racional mediante la sustitución $a\,x + b = z^n$ siendo n el mínimo común múltiplo de los exponentes fraccionarios de $a\,x + b$.

8.3.- Integrales del tipo $\displaystyle\int f\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots\right] dx$ se hallan valiéndose de la sustitución $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^n$, donde n es el mínimo común múltiplo de los números q_1, q_2, …..

8.4.- Integrales del tipo $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ se reducen al tipo de integrales $\displaystyle\int \frac{P(t)\,dt}{\sqrt{At^2+Bt+C}}$ valiéndose de la sustitución $t = \dfrac{1}{x-a}$, $dx = -\dfrac{1}{t^2}$

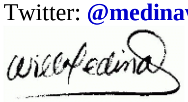
9.- Integrales de expresiones binomias.

Una expresión de la forma $x^m\,(a + b\,x^n)^p$ siendo a y b constantes cualesquiera y los exponentes m, n, p números racionales, se llama una expresión binomia. Toda expresión binomia puede reducirse a la forma $x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$.

Caso 1.- Cuando $\dfrac{m+1}{n} = \text{Un número entero o cero}$, se efectúa la sustitución $a + b\,x^n = z^s$.

Caso 2.- Cuando $\dfrac{m+1}{n} + \dfrac{r}{s} = \text{Un número entero o cero}$, se efectúa la sustitución $a + b\,x^n = z^s\,x^n$.

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**.
Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**
e-mail: **medinawj@gmail.com**
Twitter: **@medinawj**



El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:
https://www.tutoruniversitario.com/ Maturín, diciembre de 2024.