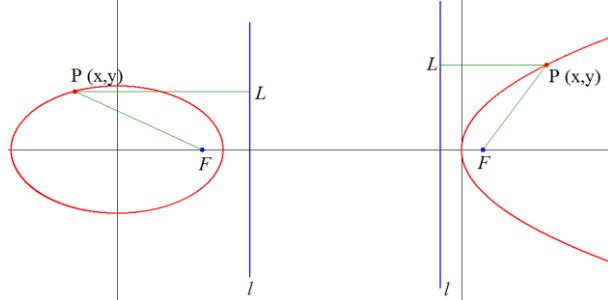


CÓNICAS.

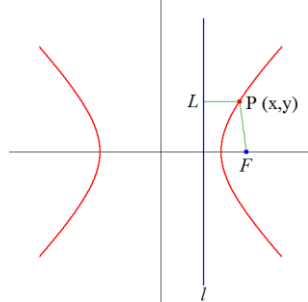
1.- Cónica. Definición.

En el plano, sea l una recta fija (la directriz) y F un punto fijo (el foco), que no está sobre la recta. El lugar geométrico de los puntos para los que el cociente de la distancia $|PF|$ desde el foco entre la distancia $|PL|$ a la recta es una constante positiva e (la excentricidad), es decir, el conjunto de puntos P que satisfacen $|PF| = e |PL|$ es una cónica.



Elipse ($e < 1$)

Parábola ($e = 1$)



Hipérbola ($e > 1$)

2.- Ecuación general de segundo grado.

En la ecuación general de segundo grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, si $B = 0$ y si $A = 0$ y $C \neq 0$, ó $C = 0$, entonces su gráfica es una de las siguientes: una parábola, dos rectas paralelas, una recta o el conjunto vacío.

La gráfica de ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ donde A y C no son ambos cero, es una cónica o una cónica degenerada. Si es una cónica, entonces la gráfica es:

- Una *circunferencia*, un *punto* o el *conjunto vacío* si $A = C$.
- Una *parábola* si $A = 0$ ó $C = 0$, esto es $AC = 0$.
- Una *elipse*, un *punto* o el *conjunto vacío* si A y C tienen el mismo signo, es decir, $AC > 0$.
- Una *hipérbola* si A y C tienen signos opuestos, esto es, $AC < 0$.

3.- Circunferencias.

3.1.- Definición.

Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo. El punto fijo se denomina **centro** de la circunferencia, y la distancia constante se le llama **radio** de la circunferencia.

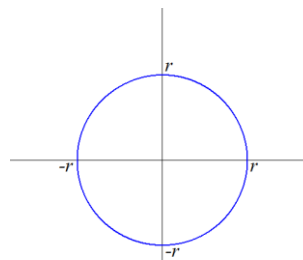
3.2.- Ecuación de una circunferencia.

Centro: $C(0, 0)$.

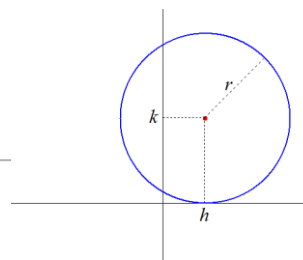
Centro: $C(h, k)$.

Radio: r .

Radio: r .



$$x^2 + y^2 = r^2$$



$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

3.3.- Trazo de una circunferencia.

Para trazar la circunferencia que tiene ecuación $x^2 + y^2 = r^2$
 1.- Se resuelve esta ecuación para y y se obtiene $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$. La gráfica de cada una de estas ecuaciones es una semicircunferencia.
 2.- Se trazan estas dos semicircunferencias, obteniéndose así la circunferencia deseada.

4.- Parábolas.

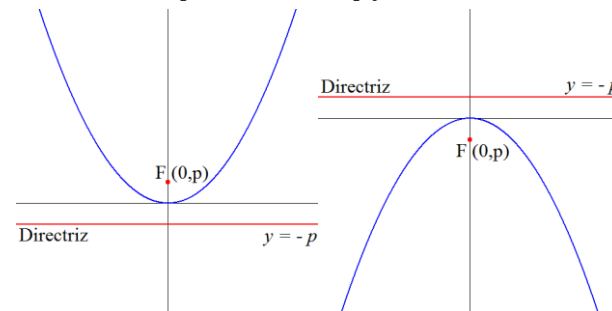
4.1.- Definición.

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo y una recta fija. El punto fijo se denomina foco, y la recta fija se llama directriz.

4.2.- Ecuación de la parábola.

Eje vertical. Foco: $F(0, p)$, Vértice: $V(0, 0)$, directriz $y = -p$.

Ecuación de la parábola: $x^2 = 4py$



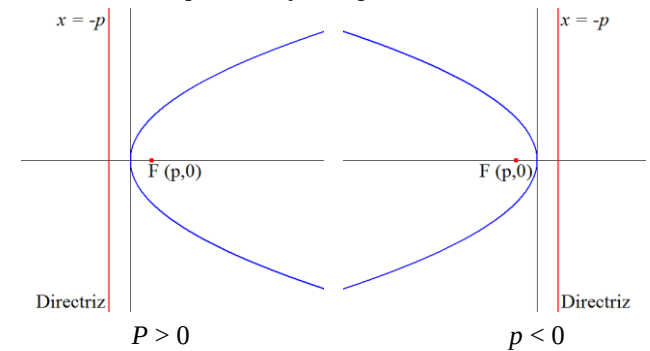
$p > 0$

$p < 0$

Eje: Horizontal. Foco: $F(p, 0)$, Vértice: $V(0, 0)$,

Directriz: $x = -p$.

Ecuación de la parábola: $y^2 = 4px$



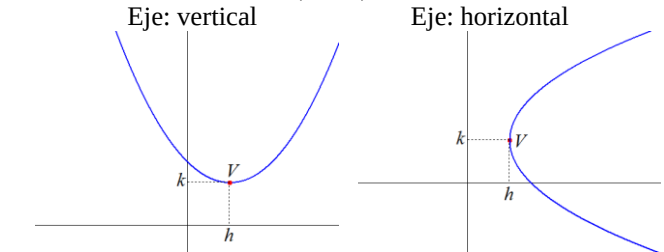
$p > 0$

$p < 0$

4.3.- Formas estándar de las ecuaciones de las parábolas.

p es la distancia dirigida del vértice al foco de una parábola.

Coordenadas del vértice: (h, k)



$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Directriz: $y = k - p$

Directriz: $x = h - p$

La gráfica de cualquier ecuación cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$ donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$, es una parábola cuyo eje es vertical.

La gráfica de cualquier ecuación cuadrática de la forma $x = ay^2 + by + c$ donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$, es una parábola cuyo eje es horizontal.

4.4.- Trazo de una parábola.

A fin de trazar la gráfica de una ecuación de la forma $y^2 = 4px$:

- Resuelva para y considerando la raíz cuadrada en los dos miembros de la ecuación, obteniéndose las dos ecuaciones $y = \sqrt{4px}$ y $y = -\sqrt{4px}$
- La unión de las gráficas de estas dos ecuaciones proporciona la gráfica de $y^2 = 4px$

5.- Elipses.

5.1.- Definición y elementos.

Una **elipse** es el conjunto de puntos de un plano tales que la suma de sus distancias desde dos puntos fijos es constante. Cada punto fijo se denomina **foco**. La recta que pasa por los focos se denomina **eje principal**. Los puntos de intersección de la elipse con su eje principal se llaman **vértices**. El punto del eje principal que se encuentra a la mitad de la distancia entre los vértices recibe el nombre de **centro**. El segmento del eje principal entre los dos vértices se denomina eje mayor. Su longitud es $2a$ unidades. El segmento del eje menor entre los puntos $(0, b)$ y $(0, -b)$ se denomina eje menor. Su longitud es $2b$ unidades. El foco yace siempre sobre el eje mayor a una distancia c del centro, siendo $b^2 = a^2 - c^2$.

5.2.- Ecuación de una elipse.

$2a$ es la constante referida en la definición de la elipse y

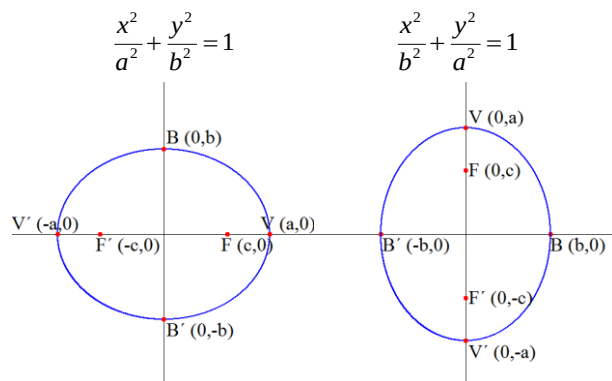
$b^2 = a^2 - c^2$. Centro de la elipse: $C(0, 0)$

Focos: $(-c, 0)$ y $(c, 0)$

Eje principal: Horizontal

Focos: $(0, -c)$ y $(0, c)$

Eje principal: Vertical



5.3.- Formas estándar de las ecuaciones de las elipses.

$2a$ es la constante referida en la definición de la elipse y

$b^2 = a^2 - c^2$. Centro de la elipse: $C(h, k)$

Focos:

$(-c+h, k)$ y $(c+h, k)$

Eje principal: Horizontal

Focos:

$(h, -c+k)$ y $(h, c+k)$

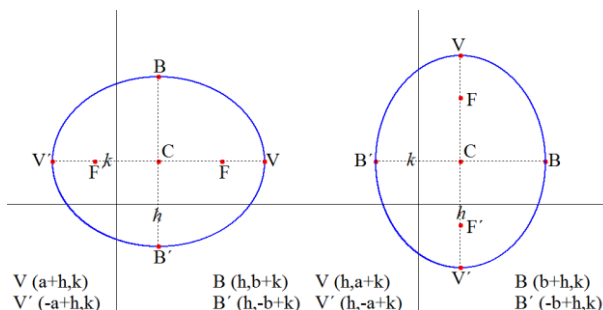
Eje principal: Vertical

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$(a > b)$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$(a > b)$



6.- Hipérbolas.

6.1.- Definición y elementos.

Una **hipérbola** es un conjunto de puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es constante. Los dos puntos fijos se denominan **focos**. La recta que pasa por los focos se denomina **eje principal**. Los puntos donde la hipérbola intersecta al eje principal se llaman **vértices**. El punto que se encuentra a la mitad de la distancia entre los vértices recibe el nombre de **centro**. La longitud del **eje transverso** es $2a$ unidades. La longitud del **eje conjugado** es $2b$ unidades.

6.2.- Ecuación de una hipérbola.

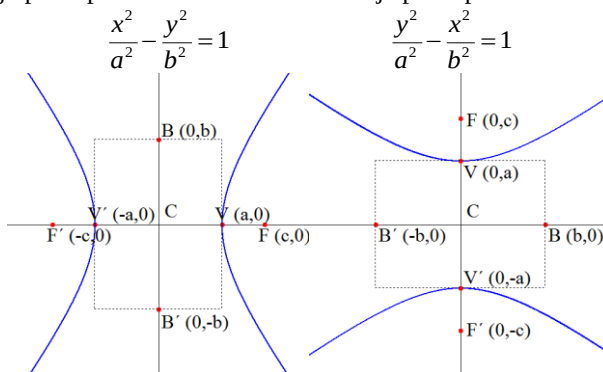
$2a$ es la constante referida en la definición de la hipérbola y $b^2 = c^2 - a^2$. Centro de la hipérbola: $C(0, 0)$

Focos: $(-c, 0)$ y $(c, 0)$

Eje principal: Horizontal

Focos: $(0, -c)$ y $(0, c)$

Eje principal: Vertical



Asíntotas: $y = \pm \frac{b}{a}x$

Asíntotas: $y = \pm \frac{a}{b}x$

Si $a = b$ la hipérbola se denomina hipérbola equilátera. La hipérbola equilátera cuya ecuación es $x^2 - y^2 = 1$ se conoce como hipérbola unitaria.

6.3.- Formas estándar de las ecuaciones de las hipérbolas.

$2a$ es la constante referida en la definición de la hipérbola y $b^2 = c^2 - a^2$. Centro de la hipérbola: $C(h, k)$

Focos:

$(-c+h, k)$ y $(c+h, k)$

Focos:

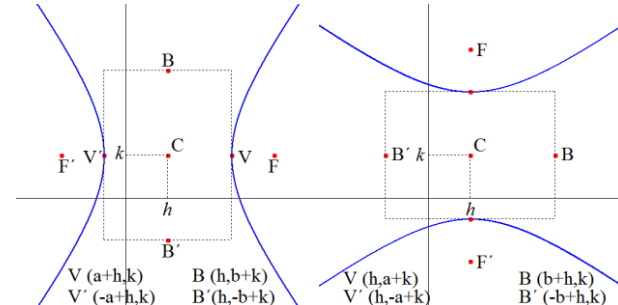
$(h, -c+k)$ y $(h, c+k)$

Eje principal: Horizontal

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Eje principal: Vertical

$$-\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



Asíntotas: $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$ Asíntotas: $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$

Si en la ecuación general de segundo grado

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, $B = 0$ y $AC < 0$, entonces la gráfica es una hipérbola o dos rectas que se intersectan.

7.- Lado recto (latus rectum) de las cónicas.

Es la cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje principal de la cónica.

7.1.- Parábola.

Longitud del lado recto: $L = |4p|$

7.2.- Elipse e hipérbola.

Longitud del lado recto: $L = \frac{2b^2}{a}$

8.- Excentricidad de una cónica.

La **excentricidad** e de una elipse o una hipérbola es la razón de la distancia no dirigida entre los focos y la distancia no dirigida entre los vértices; esto es $e = \frac{c}{a}$

Elipse: $(0 < e < 1)$.

Hipérbola: $(e > 1)$.

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina.**

Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**

e-mail: **medinawj@gmail.com**

Twitter: **@medinawj**

willmedina

El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:

<https://www.tutoruniversitario.com/> Maturín, diciembre de 2024.