LÍMITES.

1.- Definición de límite de una función.

1.1.- Definición intuitiva del límite de una función.

La noción de que las imágenes de una función $f(x)$ tiende a un número L ($f(x) \to L$) cuando x tiende a un número x_0 ($x \to x_0$) se puede establecer de la siguiente manera: Si $f(x)$ puede aproximarse arbitrariamente a un número finito L, tomando a x suficientemente cercano pero distintos de un número x_0, tanto por el lado izquierdo como por el lado derecho entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

Notación: $x \to x_0^-$: Indica que "x" tiende a x_0 por la izquierda.

$x \to x_0^+$: Indica que "x" tiende a x_0 por la derecha.

$x \to x_0^-$ ——— x_0 ——— $x \to x_0^+$

En este caso, para que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ entonces

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Observación: La existencia del límite de una función f en $x = x_0$ no depende de si f está definida en $x = x_0$ sino solamente si f está definida para valores cercanos a x_0 tanto por la derecha como por la izquierda.

1.2.- Definición formal del límite de una función.

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en el número a mismo. El límite de $f(x)$ conforme x se aproxima a a es L, lo que se escribe como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si la siguiente proposición es verdadera:

Dada cualquier $\varepsilon > 0$, no importa cuán pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

2.- Teoremas sobre límites de funciones.

2.1.- Límite de una función constante.

Si c es una constante, entonces para cualquier número a $\lim\limits_{x \to a} c = c$.

2.2.- Límite de la función identidad.

$\lim\limits_{x \to a} x = a$

2.3.- Límite de la n-ésima potencia de *x*.

Si n es cualquier número real positivo, entonces $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$.

2.4.- Límite del producto de una constante por una función.

Si c es una constante cualesquiera, entonces:

$\lim\limits_{x \to a} c\, f(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

2.5.- Límite de una función lineal.

Si m y b son dos constantes cualesquiera, entonces:

$\lim\limits_{x \to a} mx + b = ma + b$.

2.6.- Límite de la suma y de la diferencia de dos funciones.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, entonces:

$\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \pm M$

2.7.- Límite de la suma y de la diferencia de *n* funciones.

Si $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L_2 \cdots$ y $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = L_n$, entonces:

$\lim\limits_{x \to a} [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)] = L_1 \pm L_2 \pm \ldots \pm L_n$

2.8.- Límite del producto de dos funciones.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, entonces:

$\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \cdot M$

2.9.- Límite del producto de *n* funciones.

Si $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L_2 \cdots$ y $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = L_n$, entonces:

$\lim\limits_{x \to a} [f_1(x) \cdot f_2(x) \ldots f_n(x)] = L_1 \cdot L_2 \ldots L_n$

2.10.- Límite de la *n*-ésima potencia de una función.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y n es cualquier número real positivo, entonces:

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n = L^n.$$

2.11.- Límite del cociente de dos funciones.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M} \text{ si } M \neq 0.$$

2.12.- Límite de la raiz *n*-ésima de una función.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, entonces:

$\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ con la restricción de que si n es par, $L > 0$.

3.- Cálculo de límites indeterminados.

Para calcular límites indeterminados, es necesario simplificar la indeterminación y luego aplicar los teoremas dados anteriormente. En la mayoría de los casos de cálculo de límites algebraicos es necesario realizar operaciones de factorización y racionalización, o una combinación de ellas.

Si se desea calcular $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, en el cual por sustitución se obtiene $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ (indeterminado), el objetivo es crear una expresión de la forma $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{(x-a)\phi(x)}{(x-a)\gamma(x)}$, que al ser simplificada proporciona el resultado $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\phi(x)}{\gamma(x)}$ y finalmente, al evaluar el límite por sustitución se tiene $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\phi(a)}{\gamma(a)}$ con $\phi(a)$ y $\gamma(a)$ no iguales a cero simultáneamente.

3.1.- Caso 1. Numerador: Polinomio. Denominador: Polinomio.

Se procede a factorizar ambos polinomios. Se recomienda la factorización aplicando el Método de Ruffini (excepto si se trata de polinomios de grado 1, pues estos ya están factorizados), probando en primer lugar con el valor al cual tiende la variable independiente tanto en el caso del numerador como del denominador. Es necesario verificar que la raíz no se repita, y si fuere el caso, debe determinarse dicha raíz tantas veces como exista. Una vez hecha la simplificación de los factores que generan los ceros tanto en el numerador como en el denominador, se aplican los teoremas de evaluación de límites.

Fórmulas útiles de factorización:

Diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Diferencia de cubos: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

3.2.- Caso 2. Suma o diferencia de dos términos donde al menos uno es una raíz cuadrada.

Se procede a racionalizar el elemento (numerador o denominador) que contenga a la raíz cuadrada. En este caso, el procedimiento se aplica indistintamente si la raíz cuadrada aparece en el numerador o en el denominador. El objetivo es eliminar el radical, para posteriormente realizar la simplificación de los factores que generan los ceros tanto en el numerador como en el denominador (Caso 1). La forma de racionalización más común es la de binomios, por lo cual es necesario multiplicar y dividir por la conjugada del elemento que contiene el radical. En caso que el radical aparezca tanto en el numerador como en el denominador, se deben racionalizar ambos simultáneamente. En caso de aparecer polinomios, se deben factorizar, ubicando los factores que contienen a la variable independiente (x) menos el valor al cual ésta tiende.

La fórmula que se aplica en este caso es el producto de la diferencia de dos números por su suma para generar una diferencia de cuadrados: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

3.3.- Caso 3. Suma o diferencia de dos términos donde al menos uno es una raíz cúbica ó una raíz quinta.

Se procede a racionalizar el elemento (numerador o denominador) que contenga a la raíz cúbica (ó quinta). En este caso, el procedimiento se aplica indistintamente si la raíz cúbica (ó quinta) aparece en el numerador o en el denominador. El objetivo es eliminar el radical, para posteriormente realizar la simplificación de los factores que generan los ceros tanto en el numerador como en el denominador (Caso 1). La forma de racionalización más común es la de binomios, por lo cual es necesario multiplicar y dividir por el complemento del elemento que contiene el radical. En caso que el radical aparezca tanto en el numerador como en el denominador, se deben racionalizar ambos simultáneamente. En caso de aparecer polinomios, se deben factorizar, ubicando los factores que contienen a la variable independiente (x) menos el valor al cual ésta tiende.

La fórmula que se aplica en este caso es el producto de la suma (o diferencia) de dos números por su complemento para generar una suma (o diferencia) de cubos (ó quintos):

$$(a+b)\underbrace{(a^2-ab+b^2)}_{\text{Complemento}} = \underbrace{a^3+b^3}_{\text{Suma de cubos}}$$

$$(a-b)\underbrace{(a^2+ab+b^2)}_{\text{Complemento}} = \underbrace{a^3-b^3}_{\text{Diferencia de cubos}}$$

$$(a+b)\underbrace{(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)}_{\text{Complemento}} = \underbrace{a^5+b^5}_{\text{Suma de quintos}}$$

$$(a-b)\underbrace{(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)}_{\text{Complemento}} = \underbrace{a^5-b^5}_{\text{Diferencia de quintos}}$$

3.4.- Caso 4. Suma o diferencia de dos términos donde existe una raíz cuadrada y una raíz cúbica, en elementos diferentes.

Se procede a racionalizar el elemento (numerador o denominador) que contenga tanto a la raíz cuadrada como a la raíz cúbica. Se aplica una combinación de los casos 3.1, 3.2 y 3.3.

3.5.- Caso 5. Suma o diferencia de dos términos donde existe una raíz cuarta.

Se procede a racionalizar el elemento (numerador o denominador) que contenga a la raíz cuarta. Se aplica el caso 2 en una primera oportunidad para reducir la raíz cuarta a una raíz cuadrada, luego al resultado obtenido, se le aplica el caso 2 nuevamente. Posteriormente se procede como en el caso 1. Cualquier radical de índice 2 o 3 que genere indeterminación y aparezca en el elemento que no contiene a la raíz cuarta, debe trabajarse como se explicó anteriormente.

4.- Un límite importante.

El tipo de limite empleado para definir la pendiente de una recta tangente a una curva es uno de los más importantes en Cálculo. Este límite es de uso frecuente y recibe el nombre específico.

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

5.- Límites laterales.

Los límites laterales se utilizan en funciones ramificadas.

El $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y es igual a L si y sólo si $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existen y son iguales a L.

6.- Continuidad.

Definición de continuidad en un número.

Se dice que la función f es continua en el punto $x = a$ si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

i.- $f(a)$ existe.

ii.- $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

iii.- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si una o más de estas tres condiciones no se cumplen en a, entonces se dice que la función f es discontinua en a.

Una función polinomial es continua en todo número.

Una función racional es continua en todo número de su dominio.

Si f y g son dos funciones continuas en el número a, entonces

i.- $f + g$ es continua en a.

ii.- $f - g$ es continua en a;

iii.- $f \,.\, g$ es continua en a;

iv.- f / g es continua en a, considerando que $g(a) \neq 0$.

7.- Límites infinitos.

Si a es cualquier número real y si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, donde c es una constante diferente de 0, entonces:

i.- Si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

ii.- Si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

iii.- Si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

iv.- Si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

El teorema anterior también es válido si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" ó "$x \to a^-$".

8.- Asíntota vertical.

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función f si al menos uno de los siguientes enunciados es verdadero:

i.- $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ii.- $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

iii.- $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ iv.- $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

Para determinar las asíntotas verticales, se deben calcular los valores de x que anulan el denominador. Estos valores son las posibles asíntotas verticales de la gráfica de $f(x)$.

Una vez conocidos los valores de x que representan posibles asíntotas verticales, se determinan los límites por la derecha y por la izquierda de éstos valores. Si alguno de los límites calculados son infinitos, entonces el valor indicado de x es una asíntota vertical de la gráfica de la función. Si el límite no es infinito, entonces el valor indicado de x no es una asíntota vertical de la gráfica de la función.

9.- Límites al infinito.

Para todo k constante y $n \geq 1$ se cumple:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

Sea $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$ donde $a_n \neq 0$ y $b_n \neq 0$, se tiene:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_n} & \text{Si } n = m \\ \infty & \text{Si } n > m \end{cases}$$

10.- Asíntota horizontal.

La recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función f si al menos una de las proposiciones siguientes es verdadera:

i.- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ ii.- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

11.- Asíntota oblicua.

Si la gráfica de la función f tiene la recta $y = m\,x + b$ como una asíntota oblicua, entonces las constantes m y b se determinan mediante las ecuaciones:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to +\infty} [\, f(x) - m\,x \,]$$

12.- Límites trigonométricos.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(k\,x)}{(k\,x)} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^n(k\,x)}{(k\,x)^n} = 1$$

13.- Límites trigonométricos con cambio de variables.

El objetivo es determinar $\lim_{x \to a} f(x)$, donde $a \neq 0$ y $f(x)$ contiene funciones trigonométricas. Los límites de funciones trigonométricas en los cuales la variable independiente tiende a un valor distinto de cero y la indeterminación no se elimina mediante simplificación, se determinan aplicando un cambio de variables.

El cambio de variable consiste en introducir una nueva variable, definida como $u = x - a$, de tal manera que si $x \to a$, entonces $u \to 0$, luego $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{u \to 0} g(u)$.

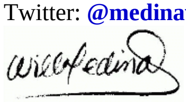
Los límites $\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$, $\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen}(k\,u)}{(k\,u)} = 1$ y $\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen}^n(k\,u)}{(k\,u)^n} = 1$ se pueden aplicar ahora para calcular el límite propuesto.

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**.

Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**

e-mail: **medinawj@gmail.com**

Twitter: **@medinawj**



El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:

https://www.tutoruniversitario.com/ Maturín, diciembre de 2024.