

FUNCIONES.

1.- Función.

Una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto X de números reales x a un conjunto Y de números reales y , donde el número y es único para cada valor específico de x .

1.1.- Definición de función.

Una **función** es un conjunto de pares ordenados de números (x,y) en los que no existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer número. El conjunto de todos los valores admisibles de x se denomina **dominio** de la función, y el conjunto de todos los valores resultantes de y recibe el nombre de **contradominio o rango** de la función.

Los símbolos x y y denotan **variables**. Debido a que el valor de y depende de la elección de x , x denota a la **variable independiente** mientras que y representa a la **variable dependiente**.

1.2.- Definición de la gráfica de una función.

Si f es una función, entonces la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x,y) del plano R^2 para los cuales (x,y) es un par ordenado de f .

Una recta vertical intersecta la gráfica de una función a lo más en un punto.

2.- Función constante.

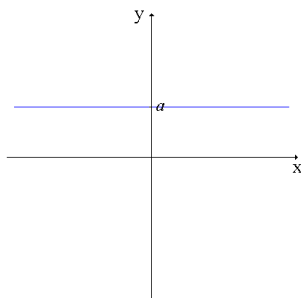
Una función cuyo contradominio consta de un solo número real recibe el nombre de función constante. De este modo, si $f(x) = a$ y a es cualquier número real, entonces f es una función constante y su gráfica es una recta horizontal a una distancia dirigida de a unidades a partir del eje x .

La función constante se define como:

$$y = f(x) = a, \quad a \in \mathbb{R} \quad a = \text{Constante.}$$

2.1.- Dominio de la función: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

2.2.- Gráfica: La representación gráfica de la función constante es una recta horizontal.



2.3.- Rango de la función: $\text{Rgo } f = \{a\}$

3.- Función lineal.

La función lineal se define por:

$$y = f(x) = ax + b$$

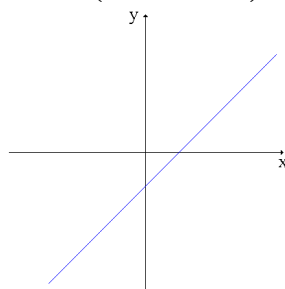
$a \neq 0 \quad a, b \in \mathbb{R} \quad a, b = \text{Constantes.}$

Los parámetros a y b representan la pendiente de la recta y la intersección con el eje “ y ” u ordenada en el origen respectivamente.

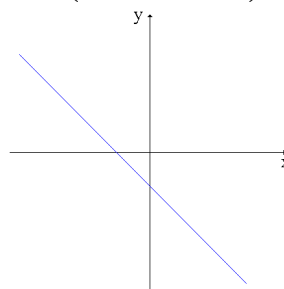
Dominio de la función: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

Gráfica: La representación gráfica de la función lineal es una recta cuya inclinación depende del valor de “ a ”.

$a > 0$ (Recta creciente)



$a < 0$ (Recta decreciente)



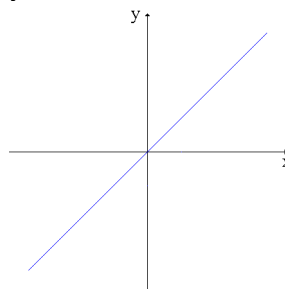
Puntos de intersección con los ejes:

- Eje x : $y = 0$. Intersección con el eje x : $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$

- Eje y : $x = 0$. Intersección con el eje y : $(0, b)$

Rango de la función: $\text{Rgo } f = \mathbb{R}$

función identidad. La función lineal particular definida por $f(x) = x$ se denomina función identidad. Su gráfica es la recta que bisecta los cuadrantes primero y tercero.



4.- Función cuadrática.

La función cuadrática se define como:

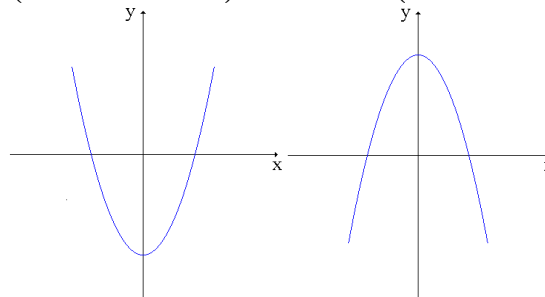
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$a \neq 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad a, b, c = \text{Constantes.}$

Dominio de la función: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

Gráfica: La representación gráfica de la función cuadrática es una **parábola** cuya concavidad depende del valor de “ a ”:

$a > 0$ (Cóncava hacia arriba) $a < 0$ (Cóncava hacia abajo).



El punto mínimo ó máximo de la curva recibe el nombre de **vértice** de la parábola.

Coordenadas del vértice.

$$x_v = -\frac{b}{2a}; \quad y_v = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right), \quad V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

Puntos de intersección con los ejes.

- Eje y : $x = 0$. Intersección con el eje y : $(0, c)$.
- Eje x : $y = 0$.

Dependiendo del **discriminante** $b^2 - 4ac$, se tendrán 2, 1 ó ninguna intersección con el eje x :

$b^2 - 4ac > 0$: 2 Puntos de intersección con el eje x .

$$\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$$

$b^2 - 4ac = 0$: 1 Punto de intersección con el eje x . Este punto de intersección coincide con el vértice de la parábola.

$$\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$$

$b^2 - 4ac < 0$: No hay puntos de intersección con el eje x .

Rango de la función:

Depende de la concavidad.

$a > 0$: $\text{Rgo } f = [y_v, +\infty)$

$a < 0$: $\text{Rgo } f = (-\infty, y_v]$

5.- Función valor absoluto.

La función valor absoluto de x , denotada por $|x|$ es una función ramificada definida como:

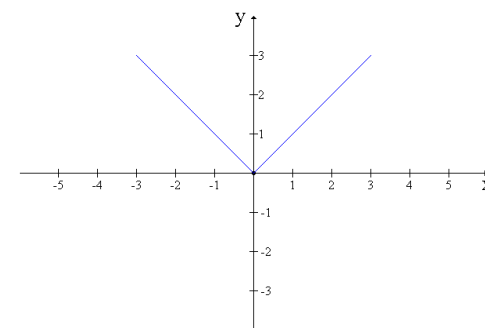
$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{Si } x < 0 \\ 0 & \text{Si } x = 0 \\ x & \text{Si } x > 0 \end{cases}$$

El valor absoluto se puede definir como $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$.

El dominio de esta función es $\mathbb{R}$, mientras que el rango está formado por los números reales mayores o iguales a cero.

Dominio de la función: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

Gráfica:



Rango de la función: $\text{Rgo } f = [0, +\infty)$

6.- Función signo.

La función signo de x , denotada por $\text{sgn}(x)$ es una función ramificada definida como:

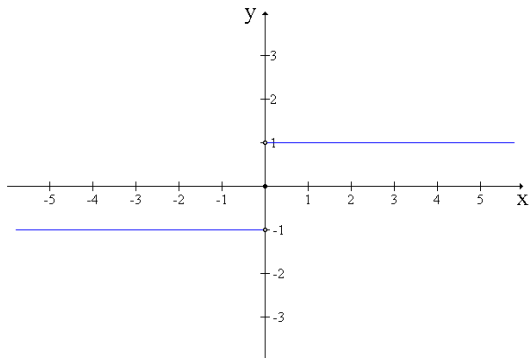
$$f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{Si } x < 0 \\ 0 & \text{Si } x = 0 \\ 1 & \text{Si } x > 0 \end{cases}$$

$\text{sgn}(x)$ se lee "signo de x ".

El dominio de esta función es $\mathbb{R}$, mientras que el rango está formado por los elementos $-1, 0$ y 1 .

Dominio de la función: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

Gráfica:



Rango de la función: $\text{Rgo } f = \{-1, 0, 1\}$

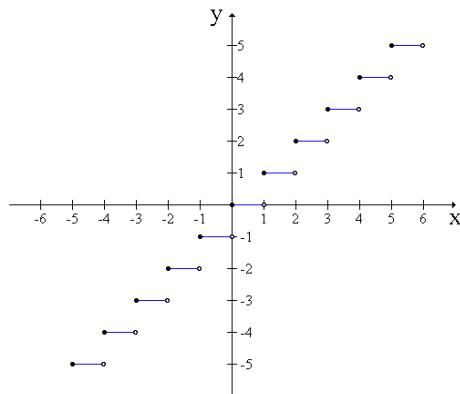
7.- Función parte entera.

La función parte entera de x , denotada por $[x]$ está definida como:

$$y = f(x) [x] = n \quad \text{Si } n \leq x < n+1$$

Dominio de la función: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

Gráfica:



Rango de la función:

$\text{Rgo } f = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\} = \mathbb{Z}$
(El conjunto de los números enteros).

8.- Función racional.

Si una función puede expresarse como el cociente de dos polinomios, entonces se denomina función racional.

La función racional se define como

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad Q(x) \neq 0 \quad \forall x$$

$P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinomiales.

Dominio de la función racional.

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / Q(x) = 0\}$$

9.- Función radical.

La función radical se define como:

$$f(x) = \sqrt[n]{P(x)} \quad n \in \mathbb{R} \quad P(x) \text{ es una función.}$$

Dominio de la función radical.

El dominio de la función radical depende de la naturaleza del índice de la raíz y de la cantidad subradical:

Caso 1. n es un número impar: $P(x)$ admite cualquier valor.

$$\text{Dom } f = \text{Dom } P(x)$$

Caso 2. n es un número par: $P(x) \geq 0$

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$$

10.- Función semicircunferencia.

La función semicircunferencia se define como

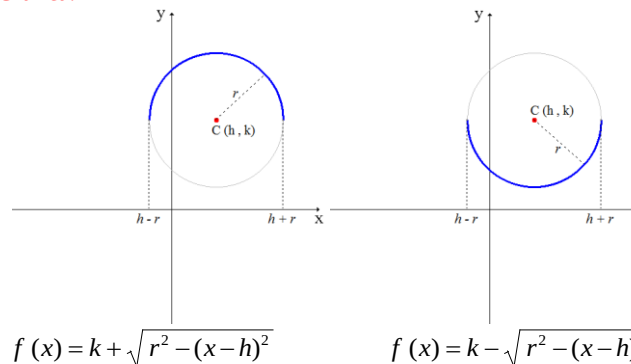
$$f(x) = k \pm \sqrt{r^2 - (x-h)^2} \quad h, k, r \in \mathbb{R} \quad h, k, r = \text{Constantes.}$$

El punto (h, k) representa el centro de la semicircunferencia.

r es el radio de la semicircunferencia.

Dominio de la función: $\text{Dom } f = [h-r, h+r]$

Gráfica:



$$f(x) = k + \sqrt{r^2 - (x-h)^2}$$

$$f(x) = k - \sqrt{r^2 - (x-h)^2}$$

Rango de la función: Depende del arco.

Arco superior: $\text{Rgo } f = [k, k+r]$

Arco inferior: $\text{Rgo } f = [k-r, k]$

11.- Funciones ramificadas.

Son funciones definidas por intervalos (función definida a trozos), la cual se define empleando más de una expresión. El dominio de estas funciones es la unión del dominio de cada una de las ramas. Su rango se determina a partir de la gráfica de la función.

12.- Operaciones con funciones.

Dominio de la función cociente.

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad h(x) \neq 0 \quad \forall x$$

Está determinado por la intersección del dominio de la función numerador, $g(x)$, y la función denominador, $h(x)$, excepto los valores x para los cuales $h(x) = 0$.

$$\text{Dom } f = \text{Dom } g \cap \text{Dom } h - \{x \in \mathbb{R} / h(x) = 0\}$$

13.- Función inversa.

La función inversa de una función dada, denotada por $f^{-1}(x)$ es aquella para la cual $(f \circ f^{-1})(x)$. Recíprocamente: $(f^{-1} \circ f)(x)$.

Dos funciones f y g son inversas una de otra si $f(g(x)) = x$ para cada x en el dominio de g y $g(f(x)) = x$ para cada x en el dominio de f .

Se denota g por f^{-1} (que se lee "inversa de f ").

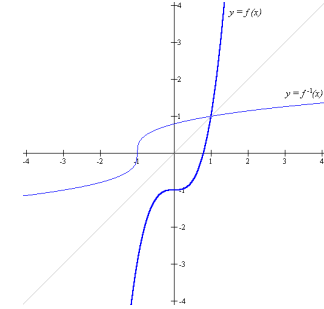
Para determinar la inversa de una función dada, hágase la siguiente sustitución en dicha función:

$$y \rightarrow x; x \rightarrow f^{-1}(x).$$

Al despejar $f^{-1}(x)$, se obtiene la inversa de la función.

13.1.- Gráfica de una función inversa.

Una propiedad importante de una función y su inversa es la simetría con respecto a la recta $y = x$ cuando se grafican simultáneamente en un sistema de coordenadas cartesianas.



La gráfica de f contiene el punto (a, b) si y sólo si la gráfica de f^{-1} contiene el punto (b, a) .

No todas las funciones tienen inversa. De hecho, para que una función f tenga inversa, es necesario que f sea uno a uno.

13.2.- Definición de función uno a uno.

Se dice que una función f es uno a uno si cada número de su contradominio corresponde exactamente a un número de su dominio; es decir, para cada x_1 y x_2 del dominio de f si $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ sólo cuando $x_1 = x_2$.

Esta definición quiere decir que si y es una función de x uno a uno (denotada también 1-1), dos valores distintos de x no pueden corresponder al mismo valor de y , y recíprocamente.

Otro nombre para una función uno a uno es inyectiva.

13.3.- Criterio de la recta horizontal.

Una función es uno a uno si y sólo si cada recta horizontal intersecta la gráfica de la función a lo más en un punto.

Autor: **MSc. Ing. Williams Medina.**

Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**

e-mail: **medinawj@gmail.com**

Twitter: **@medinawj**

Williams Medina

El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:

<https://www.tutoruniversitario.com/> Maturín, diciembre de 2024.