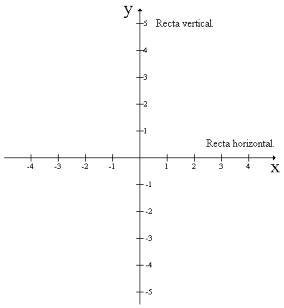
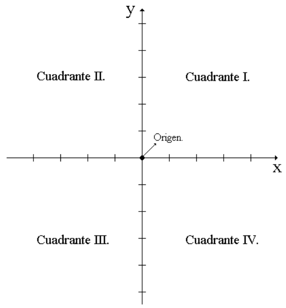
PUNTOS Y RECTAS.

El plano cartesiano.

El modelo desarrollado para representar pares ordenados de números reales se llama sistema de coordenadas rectangulares o plano cartesiano. Se construye este modelo considerando dos rectas que se cortan formando ángulos rectos.





La recta horizontal se llama tradicionalmente eje x ó eje de las abcisas, y la recta vertical se llama eje y ó eje de las ordenadas. Su punto de intersección se llama origen, el cual corresponde al punto (0,0), dividiendo las rectas al plano en cuatro partes llamadas cuadrantes o sectores.

Cada punto del plano se identifica por medio de un par ordenado (x , y) de números reales x e y llamados coordenadas del punto. El ente matemático que representa el par (x , y) se denomina punto del plano, de coordenadas x e y. El número x representa la distancia dirigida desde el eje y hasta el punto. En el punto P (x , y), la primera coordenada se denomina coordenada x o abcisa y la segunda coordenada y u ordenada.

1.- Puntos en el plano.

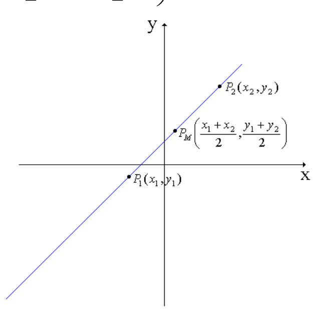
1.1.- Distancia entre dos puntos.

La distancia d entre dos puntos P_1 (x_1,y_1) y P_2 (x_2,y_2) en el plano viene dada por:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \text{ ó } d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

1.2.- Punto medio entre dos puntos.

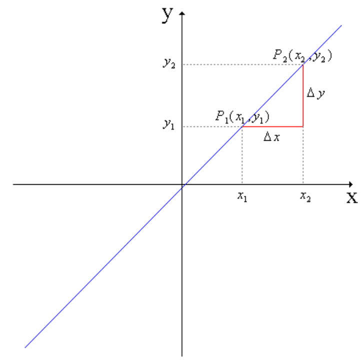
El punto medio del segmento de recta que une los puntos P_1 (x_1,y_1) y P_2 (x_2,y_2) es $P_M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)=P_M(x,y)$



2.- Rectas.

2.1.- Definición de la pendiente de una recta.

Si P_1 (x_1,y_1) y P_2 (x_2,y_2) son dos puntos cualesquiera de la recta L, la cual no es paralela al eje y, entonces la **pendiente** de L, denotada por m, está determinada por $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.



2.2.- Formas de la ecuación de una recta. Sus ecuaciones.

Forma de los dos puntos: $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$, $x_1\neq x_2$

Forma punto – pendiente: $y-y_1=m\,(x-x_1)$

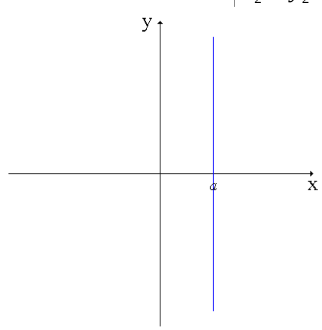
Forma pendiente – intercepción: $y = m\,x + b$. El número b, la ordenada del punto donde la recta corta al eje y, se llama **intercepción** y (u **ordenada al origen**).

Forma general: $A\,x + B\,y + C = 0$.

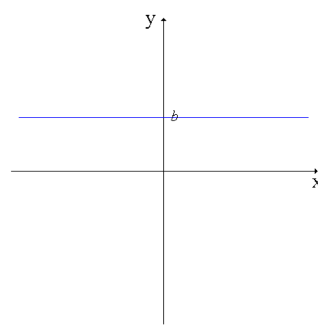
La gráfica de ecuación $A\,x + B\,y + C = 0$ donde A, B y C son constantes, y A y B no son ambos cero, es una recta.

Forma normal: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, $a\neq 0$, $b\neq 0$.

Forma de determinante: $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}=0$



i) Una ecuación de la recta vertical que tiene una intercepción x igual a a es $x = a$.



ii) Una ecuación de la rect horizontal que tiene intercepción igual a b es $y = b$.

2.3.- Representación de una recta por puntos.

1.- Construir una tabla con varios puntos solución. 2.- Situar estos puntos en el plano. 3.- Unir los puntos mediante una recta.

2.4.- Punto perteneciente a una recta.

Un punto (x_0,y_0) pertenece a una recta si al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación de la recta se obtiene una igualdad.

2.5.- Definición de las intersecciones con los ejes.

El punto $(a,0)$ se llama una intersección con el eje x de la gráfica de una ecuación si es un punto solución de la ecuación. El valor x donde la recta corta al eje x también se le llama **abcisa en el origen**.

El punto $(0,b)$ se llama una intersección con el eje y de la gráfica de una ecuación si es un punto solución de la ecuación. El valor y donde la recta corta al eje y también se le llama **ordenada en el origen**.

2.6.- Reglas importantes acerca de las intersecciones con los ejes.

Si la abcisa en el origen es a, entonces el punto $(a,0)$ pertenece a la recta.

Si la recta corta al eje x en $x = a$, entonces el punto $(a,0)$ pertenece a la recta.

Si la ordenada en el origen es b, entonces el punto $(0,b)$ pertenece a la recta.

Si la recta corta al eje y en $y = b$, entonces el punto $(0,b)$ pertenece a la recta.

2.7.- Cálculo de las intersecciones.

Para calcular la intersección con el eje x, se hace y cero y se resuelve la ecuación en x.

Para calcular la intersección con el eje y, se hace x cero y se resuelve la ecuación en y.

2.8.- Regla práctica para el cálculo de la pendiente de una recta.

Si la ecuación de la recta se da en forma pendiente – intersección ($y = m\,x + b$), la pendiente es el coeficiente de x en la ecuación.

Si la ecuación de la recta se da en forma general ($A\,x + B\,y + C = 0$), la pendiente viene dada por: $m=-\dfrac{A}{B}$.

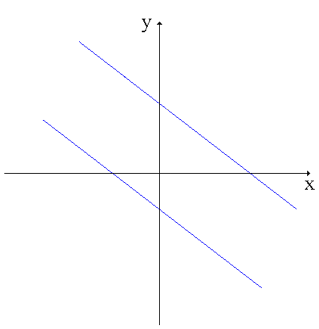
3.- Aplicaciones de la pendiente de una recta.

3.1.- Ángulo entre dos rectas.

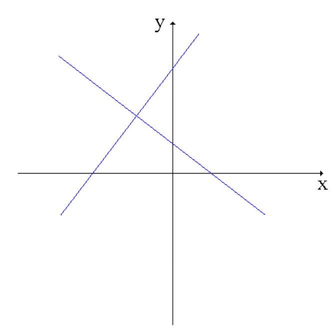
Si dos rectas con pendientes m_1 y m_2 se cortan según el ángulo θ, entonces $\tan\theta=\left|\dfrac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right|$

3.1.1.- Rectas paralelas. Si L_1 y L_2 son dos rectas no verticales diferentes que tienen pendientes m_1 y m_2 respectivamente, entonces L_1 y L_2 son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$.

3.1.2.- Rectas perpendiculares. Dos rectas no verticales L_1 y L_2 que tienen pendientes m_1 y m_2 respectivamente, son perpendiculares si y sólo si $m_1\times m_2 = -1$.



Rectas paralelas.



Rectas perpendiculares.

4.- Intersección de dos rectas. Sean dos rectas L_1: $A_1\,x + B_1\,y + C_1 = 0$ y L_2: $A_2\,x + B_2\,y + C_2 = 0$, el punto de intersección es el punto (x_i, y_i) que satisface ambas ecuaciones. Para determinar el punto de intersección, se procede a resolver el sistema formado por las ecuaciones: $A_1\,x + B_1\,y = -C_1$ $\quad$ $A_2\,x + B_2\,y = -C_2$

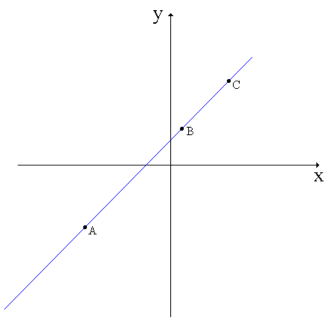
Regla práctica para resolver el sistema de ecuaciones y obtener el punto de intersección entre dos rectas.

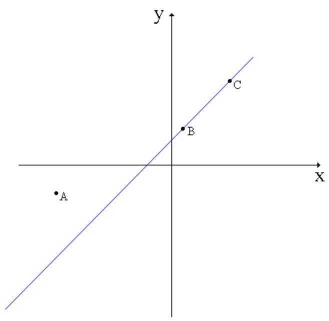
Si la ecuación de ambas rectas se dan en forma pendiente – intersección, usar el método de **igualación**.

Si la ecuación de ambas rectas se dan en forma general, usar el método de **eliminación**.

Si la ecuación de una de las rectas se da en la forma pendiente-intersección y la otra en la forma general, usar el método de **sustitución**.

5.- Puntos colineales.





5.1.- Enfoque usando la distancia entre dos puntos. Tres puntos A, B y C son colineales si la suma de las distancias entre los puntos intermedios del segmento es igual a la distancia entre los dos puntos extremos del mismo.

Puntos colineales: $d_{A\text{-}C} = d_{A\text{-}B} + d_{B\text{-}C}$

Puntos no colineales: $d_{A\text{-}C} \neq d_{A\text{-}B} + d_{B\text{-}C}$

Regla práctica: Tres puntos en el plano son colineales si la longitud del segmento mayor coincide con la suma de las longitudes de los segmentos menores.

5.2.- Enfoque usando la pendiente. Tres puntos A, B y C son colineales si la recta que pasa por los puntos A y B es la misma que la que pasa por los puntos B y C. Como la recta que pasa por A y B y la recta que pasa por B y C contienen al punto B, ellas serán la misma recta si y sólo si sus pendientes son iguales.

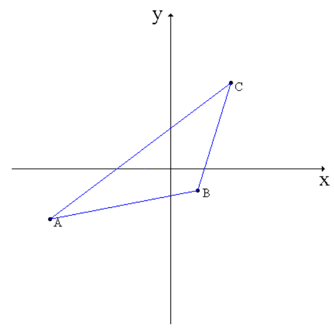
Puntos colineales: $m_{A\text{-}C} = m_{A\text{-}B} = m_{B\text{-}C}$

Puntos no colineales: $m_{A\text{-}C} \neq m_{A\text{-}B} \neq m_{B\text{-}C}$

5.3.- Enfoque usando la ecuación de la recta. Tres puntos A, B y C son colineales si la recta definida por dos de ellos contiene al tercer punto.

6.- Triángulo.

Tres puntos A, B y C en el plano forman un triángulo si y sólo si los puntos A, B y C no son colineales.



6.1 Clasificación de los triángulos.

Triángulo escaleno: Triángulo con tres lados de longitudes desiguales.

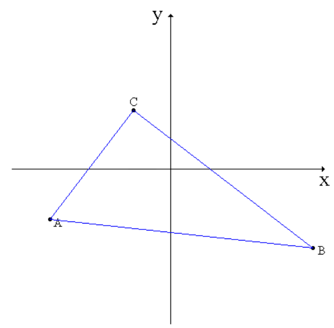
Triángulo isósceles: Triángulo con dos lados de longitudes iguales y uno de longitud diferente.

Triángulo equilátero: Triángulo con tres lados de longitudes iguales.

6.2 Un triángulo especial.

El Triángulo rectángulo:

- Tiene un ángulo recto (90º).
- Las longitudes de sus lados cumplen el Teorema de Pitágoras.



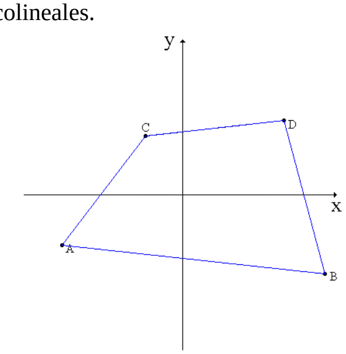
6.2.1.- Enfoque usando la distancia entre dos puntos. Triángulo en el cual las longitudes de sus lados cumplen el teorema de Pitágoras: $d_{A-B}^2 = d_{A-C}^2 + d_{B-C}^2$

Regla práctica: Tres puntos en el plano definen un triángulo rectángulo si la longitud al cuadrado del segmento mayor coincide con la suma del cuadrado de las longitudes de los segmentos menores.

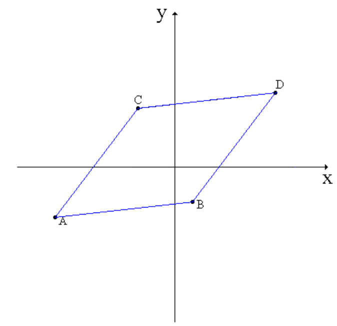
6.2.2.- Enfoque usando la pendiente. Triángulo en el cual dos de sus lados son perpendiculares: $m_{A\text{-}C} \times m_{C\text{-}B} = -1$

7.- Cuadrilátero.

Cuatro puntos A, B, C y D en el plano forman un cuadrilátero si tres de ellos no son colineales.



7.1.- Paralelogramo.



Enfoque usando la distancia entre dos puntos. Cuatro puntos A, B, C y D en el plano forman un paralelogramo si sus lados opuestos son de la misma longitud: $d_{A\text{-}B} = d_{C\text{-}D}$ y $d_{A\text{-}C} = d_{B\text{-}D}$

Enfoque usando la pendiente. Cuatro puntos A, B, C y D en el plano forman un paralelogramo si la pendiente de sus lados opuestos son iguales: $m_{A\text{-}B} = m_{C\text{-}D}$ y $m_{A\text{-}C} = m_{B\text{-}D}$

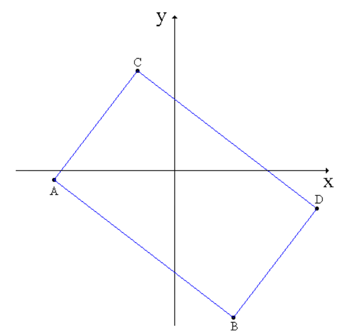
7.1.2.- Cuadrado: Cuatro puntos A, B, C y D en el plano forman un cuadrado si sus cuatro lados son de la misma longitud.

7.1.3.- Rectángulo.

Cuatro puntos A, B, C y D en el plano forman un rectángulo si la pendiente de sus lados opuestos son iguales y dos lados adyacentes son perpendiculares.

$m_{A-B} = m_{C-D}$, $\quad m_{A-C} = m_{B-D}$

y $m_{A-C} \times m_{A-B} = -1$



7.2.- Trapecio: Un trapecio es un cuadrilátero con dos lados paralelos. Cuatro puntos A, B, C y D en el plano forman un trapecio si la pendiente de dos lados opuestos son iguales y las demás diferentes entre sí.

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**.
Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**
e-mail: **medinawj@gmail.com**
Twitter: **@medinawj**

El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:
https://www.tutoruniversitario.com/ Maturín, diciembre de 2024.