

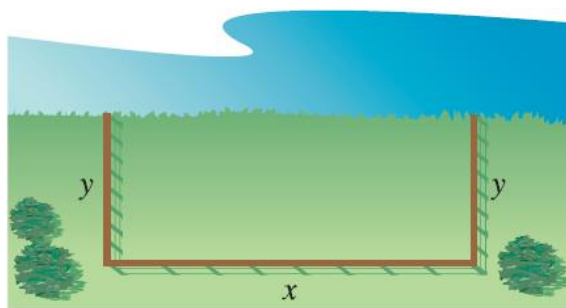
**Problema Resuelto 18. Capítulo 14 del Ayres - Mendelson. Quinta Edición. Página 112.**

Un campo rectangular, uno de cuyos bordes limita un río que corre en línea recta, será cercado con alambre. Si no se necesita cercar a lo largo del río, muestra la cantidad mínima de alambre que se precisaría si la longitud del campo es dos veces su ancho.

Solución.

Sean  $x$  e  $y$  las dimensiones del terreno.

En la figura siguiente se ilustra el terreno a cercar.



Área cercada:  $A = x y$

Puesto que el área cercada es conocida, se tiene:

$$x y = A \quad (\text{Ecuación 1})$$

La función objetivo es la cantidad de cerca a utilizar, que se expresa de la siguiente manera:

$$C = x + 2 y \quad (\text{Ecuación 2})$$

Es necesario expresar la función objetivo  $C$  en función de una sola variable. De la ecuación (1) se despeja la variable  $y$ :

$$y = \frac{A}{x} \quad (\text{Ecuación 3})$$

Se sustituye la ecuación (3) en la ecuación (2):

$$C(x) = x + 2 \left( \frac{A}{x} \right)$$

$$C(x) = x + \frac{2A}{x} \quad (\text{Ecuación 4})$$

Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos.

Para un valor extremo de la cantidad de material:

$$\frac{dC}{dx} = 0 \quad (\text{Condición 1})$$

Al derivar la ecuación (4):

$$\frac{dC}{dx} = 1 - \frac{2A}{x^2} \quad (\text{Ecuación 5})$$

Al aplicar la condición (1):

$$1 - \frac{2A}{x^2} = 0$$

Resolver la ecuación anterior con el objeto de determinar los valores críticos.

$$\frac{2A}{x^2} = 1$$

$$x^2 = 2A$$

$$x = \pm\sqrt{2A}$$

$$x_1 = -\sqrt{2A}$$

$$x_2 = \sqrt{2A}$$

Valores críticos:  $x = -\sqrt{2A}$  y  $x = \sqrt{2A}$ .

Puesto que se trata de números positivos, se analiza  $x = \sqrt{2A}$ .

Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos.

Al derivar la ecuación (5):

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{4A}{x^3}$$

Al evaluar en  $x = \sqrt{2A}$ :

$$\left. \frac{d^2C}{dx^2} \right|_{x=\sqrt{2A}} = \frac{4A}{(\sqrt{2A})^3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A}}$$

Puesto que  $\left. \frac{d^2C}{dx^2} \right|_{x=\sqrt{2A}} > 0$ , la función  $C(x) = x + \frac{2A}{x}$  presenta un mínimo relativo en

$$x = \sqrt{2A}.$$

El correspondiente valor de  $y$  se obtiene mediante la sustitución de  $x = \sqrt{2A}$  en la ecuación (3):

$$y = \frac{A}{\sqrt{2A}}$$

$$y = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{2A}$$

Conclusión.

Las dimensiones buscadas son:

$$x = \sqrt{2A}$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{2A}$$

Relación entre las longitudes.

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2A}}{\frac{1}{2}\sqrt{2A}}$$

$$\frac{x}{y} = 2$$

$$x = 2y$$

Conclusión.

La cantidad mínima de alambre que se precisa ocurre cuando la longitud del campo es dos veces su ancho.

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **Derivadas, Aplicaciones de las derivadas**, perteneciente a la asignatura **Cálculo Diferencial**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

<http://www.tutoruniversitario.com/>

Si Usted requiere la resolución de ejercicios adicionales acerca de ésta u otras asignaturas, contáctenos a través de los siguientes medios:

- WhatsApp: +58-4249744352 (En forma directa o desde nuestra página web).
- E-mail: [medinawj@gmail.com](mailto:medinawj@gmail.com)

Lista de asignaturas en las cuales podemos ayudarle:

Cálculo Diferencial.	Cálculo Integral.	Cálculo Vectorial.
Ecuaciones Diferenciales.	Trigonometría.	Matemáticas Aplicadas.
Matemáticas Financieras.	Álgebra Lineal.	Métodos Numéricos.
Estadística.	Física (Mecánica).	Física (Electricidad).
Mecánica Vectorial (Estática).	Química Inorgánica.	Fisicoquímica.
Termodinámica.	Termodinámica Química.	Mecánica de Fluidos.
Fenómenos de Transporte.	Transferencia de Calor.	Ingeniería Económica.