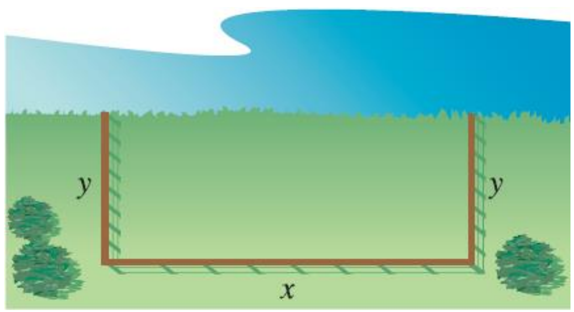
**Problema Resuelto 18. Capítulo 14 del Ayres - Mendelson. Quinta Edición. Página 112.**

Un campo rectangular, uno de cuyos bordes limita un río que corre en línea recta, será cercado con alambre. Si no se necesita cercar a lo largo del río, muestra la cantidad mínima de alambre que se precisaría si la longitud del campo es dos veces su ancho.

Solución.

Sean $x$ e $y$ las dimensiones del terreno.

En la figura siguiente se ilustra el terreno a cercar.




Área cercada: $A = x\,y$

Puesto que el área cercada es conocida, se tiene:

$x\,y = A$ (Ecuación 1)

La función objetivo es la cantidad de cerca a utilizar, que se expresa de la siguiente manera:

$C = x + 2\,y$ (Ecuación 2)

Es necesario expresar la función objetivo $C$ en función de una sola variable. De la ecuación (1) se despeja la variable $y$:

$$y = \frac{A}{x} \qquad \text{(Ecuación 3)}$$

Se sustituye la ecuación (3) en la ecuación (2):

$$C\,(x) = x + 2\left(\frac{A}{x}\right)$$

$$C\,(x) = x + \frac{2\,A}{x} \qquad \text{(Ecuación 4)}$$

Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos.

Para un valor extremo de la cantidad de material:

$$\frac{dC}{dx}=0 \qquad \text{(Condición 1)}$$

Al derivar la ecuación (4):

$$\frac{dC}{dx}=1-\frac{2A}{x^2} \qquad \text{(Ecuación 5)}$$

Al aplicar la condición (1):

$$1-\frac{2A}{x^2}=0$$

Resolver la ecuación anterior con el objeto de determinar los valores críticos.

$$\frac{2A}{x^2}=1$$

$$x^2=2A$$

$$x=\pm\sqrt{2A}$$

$$x_1=-\sqrt{2A}$$

$$x_2=\sqrt{2A}$$

Valores críticos: $x=-\sqrt{2A}$ y $x=\sqrt{2A}$.

Puesto que se trata de números positivos, se analiza $x=\sqrt{2A}$.

Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos.

Al derivar la ecuación (5):

$$\frac{d^2C}{dx^2}=\frac{4A}{x^3}$$

Al evaluar en $x=\sqrt{2A}$:

$$\left.\frac{d^2C}{dx^2}\right|_{x=\sqrt{2A}}=\frac{4A}{(\sqrt{2A})^3}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A}}$$

Puesto que $\left.\frac{d^2C}{dx^2}\right|_{x=\sqrt{2A}}>0$, la función $C(x)=x+\frac{2A}{x}$ presenta un mínimo relativo en $x=\sqrt{2A}$.

El correspondiente valor de $y$ se obtiene mediante la sustitución de $x=\sqrt{2A}$ en la ecuación (3):

$$y=\frac{A}{\sqrt{2A}}$$

$$y=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2}}$$

$$y=\tfrac{1}{2}\sqrt{2A}$$

Conclusión.

Las dimensiones buscadas son:

$$x=\sqrt{2A}$$

$$y=\tfrac{1}{2}\sqrt{2A}$$

Relación entre las longitudes.

$$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{2A}}{\tfrac{1}{2}\sqrt{2A}}$$

$$\frac{x}{y}=2$$

$$x=2y$$

Conclusión.

La cantidad mínima de alambre que se precisa ocurre cuando la longitud del campo es dos veces su ancho.