

Problema Resuelto 1. Capítulo 9 del Ayres. Página 50.

Hallar dos números cuya suma sea 120 y de forma que el producto P de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

Solución.

Sean x e y los números buscados.

Suma de ambos números: $S = x + y$

Puesto que la suma es conocida, se tiene:

$$x + y = 120 \quad (\text{Ecuación 1})$$

La función objetivo es el producto del primer número por el cuadrado del segundo, que se expresa de la siguiente manera:

$$P = x y^2 \quad (\text{Ecuación 2})$$

Es necesario expresar la función objetivo P en función de una sola variable. De la ecuación

(1) se despeja la variable y :

$$y = 120 - x \quad (\text{Ecuación 3})$$

Se sustituye la ecuación (3) en la ecuación (2):

$$P(x) = x(120 - x)^2$$

$$P(x) = x(14400 - 240x + x^2)$$

$$P(x) = 14400x - 240x^2 + x^3$$

$$P(x) = x^3 - 240x^2 + 14400x, \quad 0 \leq x \leq 120 \quad (\text{Ecuación 4})$$

Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos.

Para un valor extremo del producto:

$$\frac{dP}{dx} = 0 \quad (\text{Condición 1})$$

Al derivar la ecuación (4):

$$\frac{dP}{dx} = 3x^2 - 480x + 14400 \quad (\text{Ecuación 5})$$

Al aplicar la condición (1):

$$3x^2 - 480x + 14400 = 0$$

Al dividir entre 3 todos los términos de la ecuación anterior:

$$x^2 - 160x + 4800 = 0$$

Resolver la ecuación anterior con el objeto de determinar los valores críticos.

Se trata de una ecuación de segundo grado cuyos coeficientes son: $a = 1$, $b = -160$ y $c = 4800$. La solución se puede obtener mediante la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Al sustituir valores:

$$x = \frac{-(-160) \pm \sqrt{(-160)^2 - 4(1)(4800)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{160 \pm \sqrt{25600 - 19200}}{2}$$

$$x = \frac{160 \pm \sqrt{6400}}{2}$$

$$x = \frac{160 \pm 80}{2}$$

$$x_1 = \frac{160 + 80}{2}$$

$$x_2 = \frac{160 - 80}{2}$$

$$x_1 = \frac{240}{2}$$

$$x_2 = \frac{80}{2}$$

$$x_1 = 120$$

$$x_2 = 40$$

Valores críticos: $x = 40$ y $x = 120$.

Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos.

Al derivar la ecuación (5):

$$\frac{d^2P}{dx^2} = 6x - 480$$

Al evaluar en $x = 40$:

$$\left. \frac{d^2P}{dx^2} \right|_{x=40} = 6(40) - 480 = 240 - 480 = -240$$

Puesto que $\left. \frac{d^2P}{dx^2} \right|_{x=40} < 0$, la función $P(x) = x^3 - 240x^2 + 14400x$ presenta un máximo

relativo en $x = 40$.

Al evaluar en $x = 120$:

$$\left. \frac{d^2P}{dx^2} \right|_{x=120} = 6(120) - 480 = 720 - 480 = 240$$

Puesto que $\left. \frac{d^2P}{dx^2} \right|_{x=120} > 0$, la función $P(x) = x^3 - 240x^2 + 14400x$ presenta un mínimo

relativo en $x = 120$.

Puesto que se requiere un producto máximo, se tiene que: $x = 40$.

El correspondiente valor de y se obtiene mediante la sustitución de $x = 40$ en la ecuación (3):

$$y = 120 - 40$$

$$y = 80$$

Finalmente, aplicamos el método tabular para determinar el extremo absoluto del producto.

La aplicación del método tabular consiste en evaluar la función objetivo en cada valor crítico así como en los extremos del intervalo que representa el dominio de la función.

En $x = 0$:

$$P(0) = (0)^3 - 240(0)^2 + 14400(0)$$

$$P(0) = 0$$

En $x = 40$:

$$P(40) = (40)^3 - 240(40)^2 + 14400(40)$$

$$P(40) = 64000 - 384000 + 576000$$

$$P(40) = 256000$$

En $x = 120$:

$$P(120) = (120)^3 - 240(120)^2 + 14400(120)$$

$$P(120) = 1728000 - 3456000 + 1728000$$

$$P(120) = 0$$

x	0	40	120
$P(x)$	0	256000	0

El valor máximo del producto ocurre en $x = 40$.

El valor máximo del producto es: $P_{\max} = 256000$.

Conclusión.

Los números buscados son:

$$x = 40$$

$$y = 80$$

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **Aplicaciones de la derivada**, perteneciente a la asignatura **Cálculo Diferencial**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

<http://www.tutoruniversitario.com/>

Si Usted requiere la resolución de ejercicios adicionales acerca de ésta u otras asignaturas, contáctenos a través de los siguientes medios:

- WhatsApp: +58-4249744352 (En forma directa o desde nuestra página web).
- E-mail: medinawj@gmail.com

Lista de asignaturas en las cuales podemos ayudarle:

Cálculo Diferencial.	Cálculo Integral.	Cálculo Vectorial.
Ecuaciones Diferenciales.	Trigonometría.	Matemáticas Aplicadas.
Matemáticas Financieras.	Álgebra Lineal.	Métodos Numéricos.
Estadística.	Física (Mecánica).	Física (Electricidad).
Mecánica Vectorial (Estática).	Química Inorgánica.	Fisicoquímica.
Termodinámica.	Termodinámica Química.	Mecánica de Fluidos.
Fenómenos de Transporte.	Transferencia de Calor.	Ingeniería Económica.