**Problema Resuelto 1. Capítulo 9 del Ayres. Página 50.**

Hallar dos números cuya suma sea 120 y de forma que el producto $P$ de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

Solución.

Sean $x$ e $y$ los números buscados.

Suma de ambos números: $S = x + y$

Puesto que la suma es conocida, se tiene:

$x + y = 120$ (Ecuación 1)

La función objetivo es el producto del primer número por el cuadrado del segundo, que se expresa de la siguiente manera:

$P = x\,y^2$ (Ecuación 2)

Es necesario expresar la función objetivo $P$ en función de una sola variable. De la ecuación (1) se despeja la variable $y$:

$y = 120 - x$ (Ecuación 3)

Se sustituye la ecuación (3) en la ecuación (2):

$P(x) = x\,(120 - x)^2$

$P(x) = x\,(14400 - 240\,x + x^2)$

$P(x) = 14400\,x - 240\,x^2 + x^3$

$P(x) = x^3 - 240\,x^2 + 14400\,x\,,\ 0 \le x \le 120$ (Ecuación 4)

Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos.

Para un valor extremo del producto:

$\frac{d\,P}{d\,x} = 0$ (Condición 1)

Al derivar la ecuación (4):

$\frac{d\,P}{d\,x} = 3x^2 - 480\,x + 14400$ (Ecuación 5)

Al aplicar la condición (1):

$3\,x^2 - 480\,x + 14400 = 0$

Al dividir entre 3 todos los términos de la ecuación anterior:

$x^2 - 160\,x + 4800 = 0$

Resolver la ecuación anterior con el objeto de determinar los valores críticos.

Se trata de una ecuación de segundo grado cuyos coeficientes son: $a = 1$, $b = -160$ y $c = 4800$. La solución se puede obtener mediante la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Al sustituir valores:

$$x = \frac{-(-160) \pm \sqrt{(-160)^2 - 4(1)(4800)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{160 \pm \sqrt{25600 - 19200}}{2}$$

$$x = \frac{160 \pm \sqrt{6400}}{2}$$

$$x = \frac{160 \pm 80}{2}$$

$$x_1 = \frac{160 + 80}{2} \qquad x_2 = \frac{160 - 80}{2}$$

$$x_1 = \frac{240}{2} \qquad x_2 = \frac{80}{2}$$

$x_1 = 120$ $\qquad$ $x_2 = 40$

Valores críticos: $x = 40$ y $x = 120$.

Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos.

Al derivar la ecuación (5):

$$\frac{d^2P}{dx^2} = 6x - 480$$

Al evaluar en $x = 40$:

$$\left.\frac{d^2P}{dx^2}\right|_{x=40} = 6(40) - 480 = 240 - 480 = -240$$

Puesto que $\left.\frac{d^2P}{dx^2}\right|_{x=40} < 0$, la función $P$ ($x$) = $x^3$ – 240 $x^2$ + 14400 $x$ presenta un máximo relativo en $x$ = 40.

Al evaluar en $x$ = 120:

$$\left.\frac{d^2P}{dx^2}\right|_{x=120} = 6(120) - 480 = 720 - 480 = 240$$

Puesto que $\left.\frac{d^2P}{dx^2}\right|_{x=120} > 0$, la función $P$ ($x$) = $x^3$ – 240 $x^2$ + 14400 $x$ presenta un mínimo relativo en $x$ = 120.

Puesto que se requiere un producto máximo, se tiene que: $x$ = 40.

El correspondiente valor de $y$ se obtiene mediante la sustitución de $x$ = 40 en la ecuación (3):

$y$ = 120 – 40

$y$ = 80

Finalmente, aplicamos el método tabular para determinar el extremo absoluto del producto.

La aplicación del método tabular consiste en evaluar la función objetivo en cada valor crítico así como en los extremos del intervalo que representa el dominio de la función.

En $x$ = 0:

$P$ (0) = $(0)^3$ – 240 $(0)^2$ + 14400 (0)

$P$ (0) = 0

En $x$ = 40:

$P$ (40) = $(40)^3$ – 240 $(40)^2$ + 14400 (40)

$P$ (40) = 64000 – 384000 + 576000

$P$ (40) = 256000

En $x$ = 120:

$P$ (120) = $(120)^3$ – 240 $(120)^2$ + 14400 (120)

$P$ (120) = 1728000 – 3456000 + 1728000

$P$ (120) = 0

| $x$ | 0 | 40 | 120 |
|---|---|---|---|
| $P(x)$ | 0 | 256000 | 0 |

El valor máximo del producto ocurre en $x = 40$.

El valor máximo del producto es: $P_{max} = 256000$.

Conclusión.

Los números buscados son:

$x = 40$

$y = 80$