Problema 4, Sección 5.1 del Bear. Página 123. Problema Resuelto 21.7 del Bronson. Tercera Edición. Página 214. Problema 8-17a del Çengel. Página 475. Ejemplo 6, Sección 6.1 del Boyce. Cuarta Edición. Página 313. Ejemplo 15.2 del Sadiku. Tercera Edición. Página 679.

Demuestre directamente de la definición que $L\{\operatorname{sen}(k\,t)\}=\dfrac{k}{s^2+k^2}$.

Solución.

Definición de la transformada de Laplace: $L\{f(t)\}=\lim\limits_{c\to\infty}\int_0^c e^{-st} f(t)\,d\,t$

En este caso $f(t)=\operatorname{sen}(k\,t)$, por lo tanto:

$$L\{\operatorname{sen}(k\,t)\}=\lim_{c\to\infty}\int_0^c e^{-st}[\operatorname{sen}(k\,t)]\,d\,t$$

$$L\{\operatorname{sen}(k\,t)\}=\lim_{c\to\infty}\int_0^c e^{-st}\operatorname{sen}(k\,t)\,d\,t$$

De la tabla de integrales tenemos que:

$$\int e^{a\,x}\operatorname{sen}(b\,x)\,d\,x=\frac{e^{a\,x}}{a^2+b^2}[a\operatorname{sen}(b\,x)-b\cos(b\,x)]+c$$

Luego, con $a=-s$, $b=k$ y $x=t$:

$$L\{\operatorname{sen}(k\,t)\}=\lim_{c\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{(-s)^2+(k)^2}[-s\operatorname{sen}(k\,t)-k\cos(k\,t)]\Bigg|_0^c\right]$$

$$L\{\operatorname{sen}(k\,t)\}=\lim_{c\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{s^2+k^2}[-s\operatorname{sen}(k\,t)-k\cos(k\,t)]\Bigg|_0^c\right]$$

Al aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$$L\{\operatorname{sen}(k\,t)\}=\lim_{c\to\infty}\left\{\left[\frac{e^{-s(c)}}{s^2+k^2}[-s\operatorname{sen}(k(c))-k\cos(k(c))]\right]-\left[\frac{e^{-s(0)}}{s^2+k^2}[-s\operatorname{sen}(k(0))-k\cos(k(0))]\right]\right\}$$

$$L\{\operatorname{sen}(k\,t)\}=\lim_{c\to\infty}\left\{\frac{e^{-sc}}{s^2+k^2}[-s\operatorname{sen}(k\,c)-k\cos(k\,c)]-\frac{e^{0}}{s^2+k^2}[-s\operatorname{sen}(0)-k\cos(0)]\right\}$$

$$L\{\operatorname{sen}(k\,t)\}=\lim_{c\to\infty}\left[-\frac{s\operatorname{sen}(k\,c)\,e^{-sc}}{s^2+k^2}-\frac{k\cos(k\,c)\,e^{-sc}}{s^2+k^2}-\frac{1}{s^2+k^2}(-k)\right]$$

$$L\{\operatorname{sen}(k\,t)\}=\lim_{c\to\infty}\left[-\frac{s\operatorname{sen}(k\,c)\,e^{-sc}}{s^2+k^2}-\frac{k\cos(k\,c)\,e^{-sc}}{s^2+k^2}+\frac{k}{s^2+k^2}\right]$$

$$L\{\operatorname{sen}(k\,t)\}=\lim_{c\to\infty}\left[-\frac{s\operatorname{sen}(k\,c)\,e^{-sc}}{s^2+k^2}\right]-\lim_{c\to\infty}\left[\frac{k\cos(k\,c)\,e^{-sc}}{s^2+k^2}\right]+\lim_{c\to\infty}\left(\frac{k}{s^2+k^2}\right)$$

$$L\{\operatorname{sen}(k\,t)\}=-\frac{s}{s^2+k^2}\lim_{c\to\infty}[\operatorname{sen}(k\,c)\,e^{-sc}]-\frac{k}{s^2+k^2}\lim_{c\to\infty}[\cos(k\,c)\,e^{-sc}]+\frac{k}{s^2+k^2}\lim_{c\to\infty}(1)$$

$$L\{\operatorname{sen}(k\,t)\}=-\frac{s}{s^2+k^2}(0)-\frac{k}{s^2+k^2}(0)+\frac{k}{s^2+k^2}(1)$$

$$L\{\operatorname{sen}(k\,t)\}=\frac{k}{s^2+k^2}$$

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **La transformada de Laplace, definición de la transformada de Laplace,** perteneciente a la asignatura **Ecuaciones Diferenciales**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

http://www.tutoruniversitario.com/

Si Usted requiere la resolución de ejercicios adicionales acerca de ésta u otras asignaturas, contáctenos a través de los siguientes medios:

- WhatsApp: +58-4249744352 (En forma directa o desde nuestra página web).
- E-mail: medinawj@gmail.com

Lista de asignaturas en las cuales podemos ayudarle:

Cálculo Diferencial.	Cálculo Integral.	Cálculo Vectorial.
Ecuaciones Diferenciales.	Trigonometría.	Matemáticas Aplicadas.
Matemáticas Financieras.	Álgebra Lineal.	Métodos Numéricos.
Estadística.	Física (Mecánica).	Física (Electricidad).
Mecánica Vectorial (Estática).	Química Inorgánica.	Fisicoquímica.
Termodinámica.	Termodinámica Química.	Mecánica de Fluidos.
Fenómenos de Transporte.	Transferencia de Calor.	Ingeniería Económica.