

Ejemplo 3, Sección 7.1 del Edwards. Cuarta Edición. Página 448. Problema 5c,
Sección 6.1 del Boyce. Cuarta Edición. Página 314.

Demuestre que $L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, en donde n es un entero positivo.

Solución.

Definición de la transformada de Laplace: $L\{f(t)\} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c e^{-st} f(t) dt$

En este caso $f(t) = t^n$, por lo tanto:

$$L\{e^{at}\} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c e^{-st} (t^n) dt$$

$$L\{e^{at}\} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c t^n e^{-st} dt$$

Aplicando el método tabular para resolver la integral:

u y sus derivadas sucesivas:	dv y sus integrales sucesivas:
t^n	e^{-st}
nt^{n-1}	$-\frac{1}{s} e^{-st}$
$n(n-1)t^{n-2}$	$-\frac{1}{s^2} e^{-st}$
$n(n-1)(n-2)t^{n-3}$	$-\frac{1}{s^3} e^{-st}$
\vdots	\vdots
$n(n-1)(n-2)\dots 3t^2$	$-\frac{1}{s^{n-2}} e^{-st}$
$n(n-1)(n-2)\dots 2t$	$-\frac{1}{s^{n-1}} e^{-st}$
$n(n-1)(n-2)\dots 2.1$	$-\frac{1}{s^n} e^{-st}$
0	$-\frac{1}{s^{n+1}} e^{-st}$

$$L\{t^n\} = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{t^n e^{-st}}{s} - \frac{nt^{n-1}e^{-st}}{s^2} - \frac{n(n-1)t^{n-2}e^{-st}}{s^3} - \dots - \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3t^2 e^{-st}}{s^{n-1}}}{\frac{n(n-1)(n-2)\dots 3.2te^{-st}}{s^n} - \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1e^{-st}}{s^{n+1}}} \right]_0^c$$

Al aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$$L\{t^n\} = \lim_{c \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{\frac{(c)^n e^{-s(c)}}{s} - \frac{n(c)^{n-1}e^{-s(c)}}{s^2} - \frac{n(n-1)(c)^{n-2}e^{-s(c)}}{s^3} - \dots - \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3(c)^2 e^{-s(c)}}{s^{n-1}}}{\frac{n(n-1)(n-2)\dots 3.2(c)e^{-s(c)}}{s^n} - \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1e^{-s(c)}}{s^{n+1}}} \right] - \left[\frac{(0)^n e^{-s(0)}}{s} - \frac{n(0)^{n-1}e^{-s(0)}}{s^2} - \frac{n(n-1)(0)^{n-2}e^{-s(0)}}{s^3} - \dots - \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3(0)^2 e^{-s(0)}}{s^{n-1}}}{\frac{n(n-1)(n-2)\dots 3.2(0)e^{-s(0)}}{s^n} - \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1e^{-s(0)}}{s^{n+1}}} \right] \right\}$$

$$L\{t^n\} = \lim_{c \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{\frac{c^n e^{-sc}}{s} - \frac{nc^{n-1}e^{-sc}}{s^2} - \frac{n(n-1)c^{n-2}e^{-sc}}{s^3} - \dots - \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3c^2 e^{-sc}}{s^{n-1}}}{\frac{n(n-1)(n-2)\dots 3.2(c)e^{-sc}}{s^n} - \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1e^{-sc}}{s^{n+1}}} \right] - \left[\frac{(0)e^0}{s} - \frac{n(0)^{n-1}e^0}{s^2} - \frac{n(n-1)(0)e^0}{s^3} - \dots - \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3(0)e^0}{s^{n-1}}}{\frac{n(n-1)(n-2)\dots 3.2(0)e^0}{s^n} - \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1e^0}{s^{n+1}}} \right] \right\}$$

$$L\{t^n\} = \lim_{c \rightarrow \infty} \left\{ e^{-sc} \left[\frac{\frac{c^n}{s} - \frac{nc^{n-1}}{s^2} - \frac{n(n-1)c^{n-2}}{s^3} - \dots - \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3c^2}{s^{n-1}}}{\frac{n(n-1)(n-2)\dots 3.2(c)}{s^n} - \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1}{s^{n+1}}} \right] + \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1(1)}{s^{n+1}} \right\}$$

$$L\{t^n\} = \lim_{c \rightarrow \infty} e^{-sc} \left[\frac{\frac{c^n}{s} - \frac{nc^{n-1}}{s^2} - \frac{n(n-1)c^{n-2}}{s^3} - \dots - \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3c^2}{s^{n-1}}}{\frac{n(n-1)(n-2)\dots 3.2(c)}{s^n} - \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1}{s^{n+1}}} \right] + \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1(1)}{s^{n+1}}$$

El primer término de la expresión anterior es cero, mientras que el segundo puede escribirse como:

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **La transformada de Laplace, definición de la transformada de Laplace**, perteneciente a la asignatura **Ecuaciones Diferenciales**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

<http://www.tutoruniversitario.com/>

Si Usted requiere la resolución de ejercicios adicionales acerca de ésta u otras asignaturas, contáctenos a través de los siguientes medios:

- WhatsApp: +58-4249744352 (En forma directa o desde nuestra página web).
- E-mail: medinawj@gmail.com

Lista de asignaturas en las cuales podemos ayudarle:

Cálculo Diferencial.	Cálculo Integral.	Cálculo Vectorial.
Ecuaciones Diferenciales.	Trigonometría.	Matemáticas Aplicadas.
Matemáticas Financieras.	Álgebra Lineal.	Métodos Numéricos.
Estadística.	Física (Mecánica).	Física (Electricidad).
Mecánica Vectorial (Estática).	Química Inorgánica.	Fisicoquímica.
Termodinámica.	Termodinámica Química.	Mecánica de Fluidos.
Fenómenos de Transporte.	Transferencia de Calor.	Ingeniería Económica.