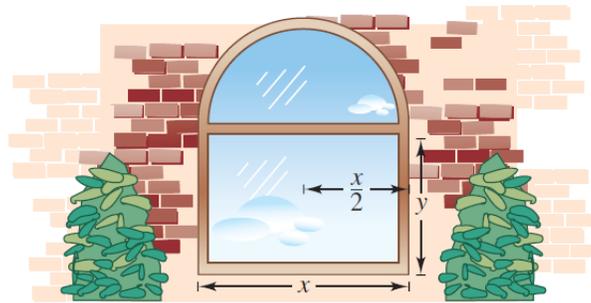


Ejemplo 3. § 6, Capítulo 6 del Jiménez - Paredes. Página 98.

Una ventana tiene la forma de un rectángulo, con un semicírculo en lo alto y su perímetro es 4. Hallar las dimensiones de la ventana para que el área sea máxima.

Solución.

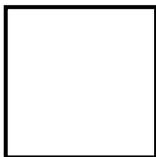
Se asignan las siguientes dimensiones a la ventana:



Premisa: La pieza de vidrio es única, por lo tanto no existe marco que divida el rectángulo y el semicírculo.

Se forman las siguientes figuras:

Rectángulo de lados x e y :



Semicírculo de radio r :



Perímetro de la ventana.

Perímetro = Longitud horizontal del rectángulo + $2 \times$ Longitud vertical del rectángulo + Longitud del semicírculo.

$$p = x + 2y + \pi r$$

$$p = x + 2y + \pi \left(\frac{x}{2} \right)$$

$$p = x + 2y + \frac{1}{2} \pi x$$

$$p = \left(\frac{1}{2} \pi + 1 \right) x + 2y$$

Puesto que el perímetro es conocido, se tiene:

$$\left(\frac{1}{2} \pi + 1 \right) x + 2y = 4$$

(Ecuación 1)

La función objetivo es la suma de áreas, que se expresa de la siguiente manera:

$$A = xy + \frac{1}{2} \pi r^2$$

$$A = xy + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$A = xy + \frac{1}{8} \pi x^2 \quad (\text{Ecuación 2})$$

Es necesario expresar la función objetivo A en función de una sola variable. De la ecuación (1) se despeja la variable y :

$$y = \frac{4 - (\frac{1}{2} \pi + 1)x}{2}$$

$$y = 2 - (\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2})x \quad (\text{Ecuación 3})$$

Se sustituye la ecuación (3) en la ecuación (2):

$$A(x) = x[2 - (\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2})x] + \frac{1}{8} \pi x^2$$

$$A(x) = 2x - (\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2})x^2 + \frac{1}{8} \pi x^2$$

$$A(x) = 2x - (\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \pi)x^2$$

$$A(x) = 2x - (\frac{1}{8} \pi + \frac{1}{2})x^2$$

$$A(x) = -(\frac{1}{8} \pi + \frac{1}{2})x^2 + 2x$$

$$A(x) = \left(-\frac{\pi+4}{8}\right)x^2 + 2x \quad (\text{Ecuación 4})$$

Se ilustrarán dos mecanismos para obtener el extremo de la función $A(x)$.

Primer mecanismo de solución.

La función $A(x)$ es una función cuadrática. Al comparar la ecuación (4) con

$A = ax^2 + bx + c$, se tiene que:

$$a = -\frac{\pi+4}{8}, b = 2, c = 0$$

Siendo $a = -\frac{\pi+4}{8}$ ($a < 0$), la función cuadrática es cóncava hacia abajo y por lo tanto presenta un máximo.

El valor de la abscisa que genera el punto máximo está dado por:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$x = -\frac{(2)}{2\left(-\frac{\pi+4}{8}\right)}$$

$$x = \frac{2}{\frac{\pi+4}{4}}$$

$$x = \frac{8}{\pi+4}$$

$$x \approx 1.1202$$

El correspondiente valor de y se obtiene mediante la sustitución de $x = \frac{8}{\pi+4}$ en la ecuación (3):

$$y = 2 - \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{8}{\pi+4}\right)$$

$$y = 2 - \frac{2\pi}{\pi+4} - \frac{4}{\pi+4}$$

$$y = \frac{2\pi+8-2\pi-4}{\pi+4}$$

$$y = \frac{4}{\pi+4}$$

$$y \approx 0.5601$$

Radio del semicírculo.

$$r = \frac{1}{2}x$$

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{\pi+4}\right)$$

$$r = \frac{4}{\pi+4}$$

$$r \approx 0.5601$$

Conclusión.

Las dimensiones requeridas de la ventana son:

$$x = \frac{8}{\pi + 4}$$

$$y = \frac{4}{\pi + 4}$$

Radio del semicírculo.

$$r = \frac{4}{\pi + 4}$$

Segundo mecanismo de solución.

Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos.

Para un valor extremo del área:

$$\frac{dA}{dx} = 0 \quad (\text{Condición 1})$$

Al derivar la ecuación (4):

$$\frac{dA}{dx} = \left(-\frac{\pi + 4}{4} \right) x + 2 \quad (\text{Ecuación 5})$$

Al aplicar la condición (1):

$$\left(-\frac{\pi + 4}{4} \right) x + 2 = 0$$

$$\left(\frac{\pi + 4}{4} \right) x = 2$$

$$x = \frac{8}{\pi + 4}$$

$$x \approx 1.1202$$

$$\text{Valor crítico: } x = \frac{8}{\pi + 4}.$$

Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos.

Al derivar la ecuación (9):

$$\frac{d^2A}{dx^2} = -\frac{\pi + 4}{4}$$

Al evaluar en $x = \frac{8}{\pi + 4}$:

$$\left. \frac{d^2 A}{dx^2} \right|_{x=\frac{8}{\pi+4}} = -\frac{\pi+4}{4}$$

Puesto que $\left. \frac{d^2 A}{dx^2} \right|_{x=\frac{8}{\pi+4}} < 0$, la función $A(x) = \left(-\frac{\pi+4}{8}\right)x^2 + 8x$ presenta un máximo

relativo en $x = \frac{8}{\pi + 4}$.

El correspondiente valor de y se obtiene mediante la sustitución de $x = \frac{8}{\pi + 4}$ en la ecuación (3):

$$y = 2 - \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{8}{\pi + 4}\right)$$

$$y = 2 - \frac{2\pi}{\pi + 4} - \frac{4}{\pi + 4}$$

$$y = \frac{2\pi + 8 - 2\pi - 4}{\pi + 4}$$

$$y = \frac{4}{\pi + 4}$$

$$y \approx 0.5601$$

Radio del semicírculo.

$$r = \frac{1}{2}x$$

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{\pi + 4}\right)$$

$$r = \frac{4}{\pi + 4}$$

$$r \approx 0.5601$$

Conclusión.

Las dimensiones requeridas de la ventana son:

$$x = \frac{8}{\pi + 4}$$

$$y = \frac{4}{\pi + 4}$$

Radio del semicírculo:

$$r = \frac{4}{\pi + 4}$$

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **Derivadas, Aplicaciones de las derivadas**, perteneciente a la asignatura **Cálculo Diferencial**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

<http://www.tutoruniversitario.com/>

Si Usted requiere la resolución de ejercicios adicionales acerca de ésta u otras asignaturas, contáctenos a través de los siguientes medios:

- WhatsApp: +58-4249744352 (En forma directa o desde nuestra página web).
- E-mail: medinawj@gmail.com

Lista de asignaturas en las cuales podemos ayudarle:

Cálculo Diferencial.	Cálculo Integral.	Cálculo Vectorial.
Ecuaciones Diferenciales.	Trigonometría.	Matemáticas Aplicadas.
Matemáticas Financieras.	Álgebra Lineal.	Métodos Numéricos.
Estadística.	Física (Mecánica).	Física (Electricidad).
Mecánica Vectorial (Estática).	Química Inorgánica.	Fisicoquímica.
Termodinámica.	Termodinámica Química.	Mecánica de Fluidos.
Fenómenos de Transporte.	Transferencia de Calor.	Ingeniería Económica.