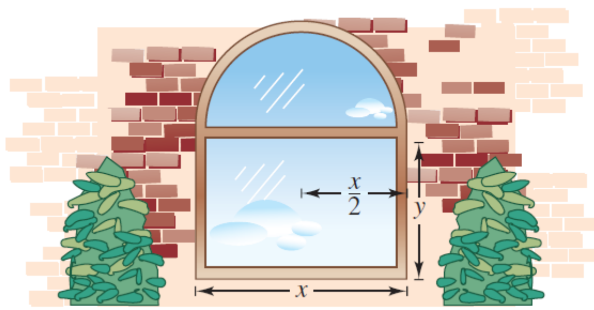
Ejemplo 3. § 6, Capítulo 6 del Jiménez - Paredes. Página 98.

Una ventana tiene la forma de un rectángulo, con un semicírculo en lo alto y su perímetro es 4. Hallar las dimensiones de la ventana para que el área sea máxima.

Solución.

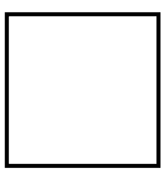
Se asignan las siguientes dimensiones a la ventana:



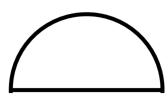
Premisa: La pieza de vidrio es única, por lo tanto no existe marco que divida el rectángulo y el semicírculo.

Se forman las siguientes figuras:

Rectángulo de lados *x* e *y*:



Semicírculo de radio *r*:



Perímetro de la ventana.

Perímetro = Longitud horizontal del rectángulo + 2×Longitud vertical del rectángulo + Longitud del semicírculo.

$$p = x + 2y + \pi r$$

$$p = x + 2y + \pi\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$p = x + 2y + \tfrac{1}{2}\pi x$$

$$p = (\tfrac{1}{2}\pi + 1)x + 2y$$

Puesto que el perímetro es conocido, se tiene:

$$(\tfrac{1}{2}\pi + 1)x + 2y = 4 \qquad \text{(Ecuación 1)}$$

La función objetivo es la suma de áreas, que se expresa de la siguiente manera:

$$A = x\,y + \tfrac{1}{2}\pi\,r^2$$

$$A = x\,y + \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$A = x\,y + \tfrac{1}{8}\pi\,x^2 \qquad \text{(Ecuación 2)}$$

Es necesario expresar la función objetivo *A* en función de una sola variable. De la ecuación (1) se despeja la variable *y*:

$$y = \frac{4 - (\tfrac{1}{2}\pi + 1)\,x}{2}$$

$$y = 2 - (\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2})\,x \qquad \text{(Ecuación 3)}$$

Se sustituye la ecuación (3) en la ecuación (2):

$$A(x) = x[2 - (\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2})\,x] + \tfrac{1}{8}\pi\,x^2$$

$$A(x) = 2\,x - (\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2})\,x^2 + \tfrac{1}{8}\pi\,x^2$$

$$A(x) = 2\,x - (\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}\pi)\,x^2$$

$$A(x) = 2\,x - (\tfrac{1}{8}\pi + \tfrac{1}{2})\,x^2$$

$$A(x) = -(\tfrac{1}{8}\pi + \tfrac{1}{2})\,x^2 + 2\,x$$

$$A(x) = \left(-\frac{\pi + 4}{8}\right)x^2 + 2\,x \qquad \text{(Ecuación 4)}$$

Se ilustrarán dos mecanismos para obtener el extremo de la función *A* (*x*).

Primer mecanismo de solución.

La función *A* (*x*) es una función cuadrática. Al comparar la ecuación (4) con $A = a\,x^2 + b\,x + c$, se tiene que:

$a = -\frac{\pi+4}{8}$, $b = 2$, $c = 0$

Siendo $a = -\frac{\pi+4}{8}$ ($a < 0$), la función cuadrática es cóncava hacia abajo y por lo tanto presenta un máximo.

El valor de la abcisa que genera el punto máximo está dado por:

$$x=-\frac{b}{2a}$$

$$x=-\frac{(2)}{2(-\frac{\pi+4}{8})}$$

$$x=\frac{2}{\frac{\pi+4}{4}}$$

$$x=\frac{8}{\pi+4}$$

$x\approx 1.1202$

El correspondiente valor de y se obtiene mediante la sustitución de $x=\dfrac{8}{\pi+4}$ en la ecuación (3):

$$y=2-(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2})\left(\frac{8}{\pi+4}\right)$$

$$y=2-\frac{2\pi}{\pi+4}-\frac{4}{\pi+4}$$

$$y=\frac{2\pi+8-2\pi-4}{\pi+4}$$

$$y=\frac{4}{\pi+4}$$

$y\approx 0.5601$

Radio del semicírculo.

$$r=\frac{1}{2}x$$

$$r=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{\pi+4}\right)$$

$$r=\frac{4}{\pi+4}$$

$r\approx 0.5601$

Conclusión.

Las dimensiones requeridas de la ventana son:

$$x=\frac{8}{\pi+4}$$

$$y=\frac{4}{\pi+4}$$

Radio del semicírculo.

$$r=\frac{4}{\pi+4}$$

Segundo mecanismo de solución.

Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos.

Para un valor extremo del área:

$$\frac{dA}{dx}=0 \qquad \text{(Condición 1)}$$

Al derivar la ecuación (4):

$$\frac{dA}{dx}=\left(-\frac{\pi+4}{4}\right)x+2 \qquad \text{(Ecuación 5)}$$

Al aplicar la condición (1):

$$\left(-\frac{\pi+4}{4}\right)x+2=0$$

$$\left(\frac{\pi+4}{4}\right)x=2$$

$$x=\frac{8}{\pi+4}$$

$x\approx 1.1202$

Valor crítico: $x=\frac{8}{\pi+4}$.

Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos.

Al derivar la ecuación (9):

$$\frac{d^2A}{dx^2}=-\frac{\pi+4}{4}$$

Al evaluar en $x=\dfrac{8}{\pi+4}$:

$$\left.\frac{d^2A}{dx^2}\right|_{x=\frac{8}{\pi+4}}=-\frac{\pi+4}{4}$$

Puesto que $\left.\dfrac{d^2A}{dx^2}\right|_{x=\frac{8}{\pi+4}}<0$, la función $A(x)=\left(-\dfrac{\pi+4}{8}\right)x^2+8x$ presenta un máximo relativo en $x=\dfrac{8}{\pi+4}$.

El correspondiente valor de y se obtiene mediante la sustitución de $x=\dfrac{8}{\pi+4}$ en la ecuación (3):

$$y=2-(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2})\left(\frac{8}{\pi+4}\right)$$

$$y=2-\frac{2\pi}{\pi+4}-\frac{4}{\pi+4}$$

$$y=\frac{2\pi+8-2\pi-4}{\pi+4}$$

$$y=\frac{4}{\pi+4}$$

$y\approx 0.5601$

Radio del semicírculo.

$$r=\frac{1}{2}x$$

$$r=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{\pi+4}\right)$$

$$r=\frac{4}{\pi+4}$$

$r\approx 0.5601$

Conclusión.

Las dimensiones requeridas de la ventana son:

$$x=\frac{8}{\pi+4}$$

$$y=\frac{4}{\pi+4}$$

Radio del semicírculo:

$$r=\frac{4}{\pi+4}$$