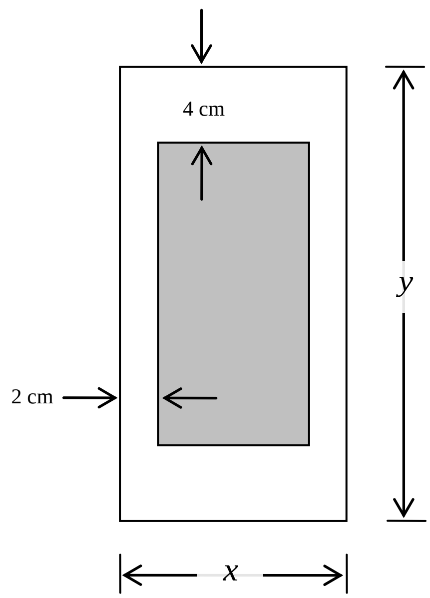
Ejemplo 4. §6, Capítulo 6 del Jiménez - Paredes. Página 99.

Una etiqueta impresa debe contener 50 cm^2 de texto con un margen de 4 cm arriba y abajo y de 2 cm a los lados. Hallar las dimensiones de la hoja de papel de manera que su área sea mínima.

Solución.

En la figura siguiente se ilustra la página. Las dimensiones de la página son x e y.



La cantidad de papel es mínima cuando el área de la página es la menor posible.

La función objetivo es el área de la página, que se expresa de la siguiente manera:

$A = x\,y$ (Ecuación 1)

En base a la condición conocida (debe contener 50 cm^2 de texto), se tiene:

Área impresa.

$A_{\text{Impresa}} = (x - 4)\,(y - 8)$

$50 = (x - 4)\,(y - 8)$ (Ecuación 2)

Es necesario expresar la función objetivo A en función de una sola variable. De la ecuación (2) se despeja la variable y:

$$\frac{50}{x-4} = y - 8$$

$$y = \frac{50}{x-4} + 8 \qquad \text{(Ecuación 3)}$$

Se sustituye la ecuación (3) en la ecuación (1):

$$A(x) = x\left(\frac{50}{x-4} + 8\right)$$

$$A(x) = \frac{50\,x}{x-4} + 8\,x \qquad \text{(Ecuación 4)}$$

Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos.

Para un valor extremo del área:

$$\frac{d\,A}{d\,x} = 0 \qquad \text{(Condición 1)}$$

Al derivar la ecuación (4):

$$\frac{d\,A}{d\,x} = \frac{50\,(x-4) - 50\,x}{(x-4)^2} + 8$$

$$\frac{d\,A}{d\,x} = \frac{50\,x - 200 - 50\,x}{(x-4)^2} + 8$$

$$\frac{d\,A}{d\,x} = \frac{-200}{(x-4)^2} + 8 \qquad \text{(Ecuación 5)}$$

Al aplicar la condición (1):

$$\frac{-200}{(x-4)^2} + 8 = 0$$

Resolver la ecuación anterior con el objeto de determinar los valores críticos.

$$\frac{200}{(x-4)^2} = 8$$

$200 = 8\,(x-4)^2$

$25 = (x-4)^2$

$(x-4)^2 = 25$

$$x - 4 = \pm\sqrt{25}$$

$x - 4 = \pm\, 5$

$x = 4 \pm 5$

$x_1 = 4 - 5 = -1$

$x_2 = 4 + 5 = 9$

Valores críticos: $x = -1$, $x = 9$.

Puesto que se trata de números positivos, se analiza $x = 9$.

Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos.

Al derivar la ecuación (5):

$$\frac{d^2 A}{d x^2} = \frac{400}{(x-4)^3}$$

Al evaluar en $x = 9$:

$$\left.\frac{d^2 A}{d x^2}\right|_{x=9} = \frac{400}{(9-4)^3}$$

$$\left.\frac{d^2 A}{d x^2}\right|_{x=9} = \frac{400}{(5)^3}$$

$$\left.\frac{d^2 A}{d x^2}\right|_{x=9} = \frac{16}{5}$$

Puesto que $\left.\frac{d^2 A}{d x^2}\right|_{x=9} > 0$, la función $A(x) = \frac{50x}{x-4} + 8x$ presenta un mínimo relativo en $x = 9$.

El correspondiente valor de y se obtiene mediante la sustitución de $x = 9$ en la ecuación (3):

$$y = \frac{50}{9-4} + 8$$

$$y = \frac{50}{5} + 8$$

$y = 10 + 8$

$y = 18$

Conclusión.

Las dimensiones de la página son:

$x = 9$ cm

$y = 18$ cm