

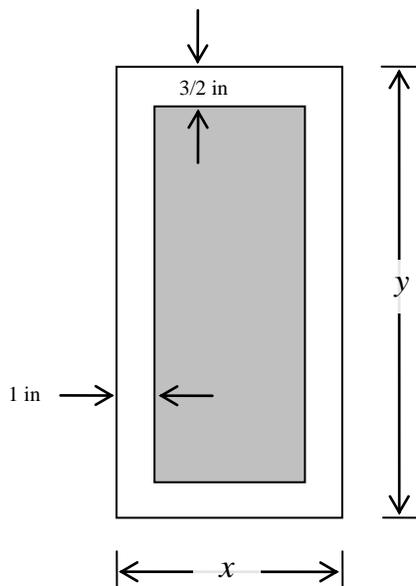
**Ejemplo 4. Sección 5.1 del Larson – Hostetler. Segunda Edición. Página 203. Ejemplo 3. Sección 3.7 del Larson – Hostetler. Octava Edición. Página 220. Example 3. Section 3.7 from Larson – Edwards. Ninth Edition. Page 244. Example 3. Section 3.7 from Larson – Edwards. Tenth Edition. Page 217.**

Una página rectangular ha de contener 24 pulgadas cuadradas de impresión. Los márgenes superior e inferior de la página tienen cada uno una anchura de  $1\frac{1}{2}$  pulgadas. Los márgenes laterales tienen una pulgada. ¿Cuáles habrían de ser las dimensiones de la página de modo que la cantidad de papel a emplear fuera mínima?

A rectangular page is to contain 24 square inches of print. The margins at the top and bottom of the page are to be  $1\frac{1}{2}$  inches, and the margins on the left and right are to be 1 inch. What should the dimensions of the page be so that the least amount of paper is used?

Solución.

En la figura siguiente se ilustra la página. Las dimensiones de la página son  $x$  e  $y$ .



La cantidad de papel es mínima cuando el área de la página es la menor posible.

La función objetivo es el área de la página, que se expresa de la siguiente manera:

$$A = x y \quad \text{(Ecuación 1)}$$

En base a la condición conocida (ha de contener 24 pulgadas cuadradas de impresión), se tiene:

Área impresa.

$$A_{\text{Impresa}} = (x - 2)(y - 3)$$

$$24 = (x - 2)(y - 3) \quad (\text{Ecuación 2})$$

Es necesario expresar la función objetivo  $A$  en función de una sola variable. De la ecuación (2) se despeja la variable  $y$ :

$$\frac{24}{x - 2} = y - 3$$

$$y = \frac{24}{x - 2} + 3 \quad (\text{Ecuación 3})$$

Se sustituye la ecuación (3) en la ecuación (1):

$$A(x) = x \left( \frac{24}{x - 2} + 3 \right)$$

$$A(x) = \frac{24x}{x - 2} + 3x \quad (\text{Ecuación 4})$$

Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos.

Para un valor extremo del área:

$$\frac{dA}{dx} = 0 \quad (\text{Condición 1})$$

Al derivar la ecuación (4):

$$\frac{dA}{dx} = \frac{24(x - 2) - 24x}{(x - 2)^2} + 3$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{24x - 48 - 24x}{(x - 2)^2} + 3$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{-48}{(x - 2)^2} + 3 \quad (\text{Ecuación 5})$$

Al aplicar la condición (1):

$$\frac{-48}{(x - 2)^2} + 3 = 0$$

Resolver la ecuación anterior con el objeto de determinar los valores críticos.

$$\frac{48}{(x-2)^2} = 3$$

$$48 = 3(x-2)^2$$

$$16 = (x-2)^2$$

$$(x-2)^2 = 16$$

$$x-2 = \pm\sqrt{16}$$

$$x-2 = \pm 4$$

$$x = 2 \pm 4$$

$$x_1 = 2 - 4 = -2$$

$$x_2 = 2 + 4 = 6$$

Valores críticos:  $x = -2$ ,  $x = 6$ .

Puesto que se trata de números positivos, se analiza  $x = 6$ .

Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos.

Al derivar la ecuación (5):

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{96}{(x-2)^3}$$

Al evaluar en  $x = 6$ :

$$\left. \frac{d^2 A}{dx^2} \right|_{x=6} = \frac{96}{(6-2)^3}$$

$$\left. \frac{d^2 A}{dx^2} \right|_{x=6} = \frac{96}{(4)^3}$$

$$\left. \frac{d^2 A}{dx^2} \right|_{x=6} = \frac{3}{4}$$

Puesto que  $\left. \frac{d^2 A}{dx^2} \right|_{x=6} > 0$ , la función  $A(x) = \frac{24x}{x-2} + 3x$  presenta un mínimo relativo en  $x =$

6.

El correspondiente valor de  $y$  se obtiene mediante la sustitución de  $x = 6$  en la ecuación (3):

$$y = \frac{24}{6-2} + 3$$

$$y = \frac{24}{4} + 3$$

$$y = 6 + 3$$

$$y = 9$$

Conclusión.

Las dimensiones de la página son:

$$x = 6 \text{ pulg}$$

$$y = 9 \text{ pulg}$$

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **Derivadas, Aplicaciones de las derivadas**, perteneciente a la asignatura **Cálculo Diferencial**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

<http://www.tutoruniversitario.com/>

Si Usted requiere la resolución de ejercicios adicionales acerca de ésta u otras asignaturas, contáctenos a través de los siguientes medios:

- WhatsApp: +58-4249744352 (En forma directa o desde nuestra página web).
- E-mail: [medinawj@gmail.com](mailto:medinawj@gmail.com)

Lista de asignaturas en las cuales podemos ayudarle:

Cálculo Diferencial.	Cálculo Integral.	Cálculo Vectorial.
Ecuaciones Diferenciales.	Trigonometría.	Matemáticas Aplicadas.
Matemáticas Financieras.	Álgebra Lineal.	Métodos Numéricos.
Estadística.	Física (Mecánica).	Física (Electricidad).
Mecánica Vectorial (Estática).	Química Inorgánica.	Fisicoquímica.
Termodinámica.	Termodinámica Química.	Mecánica de Fluidos.
Fenómenos de Transporte.	Transferencia de Calor.	Ingeniería Económica.