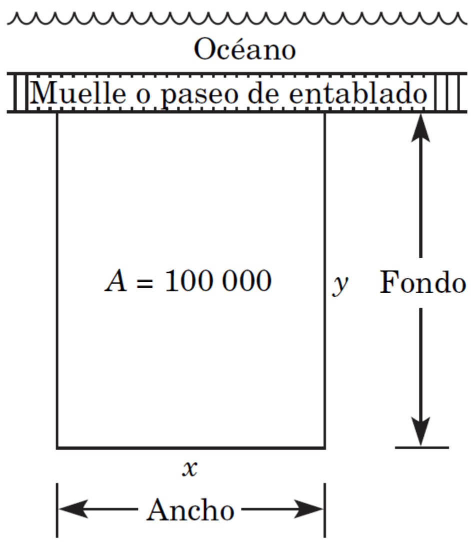
Ejemplo 27. Sección 14.6 del Budnick. Tercera Edición. Página 671. Ejemplo 11. Sección 17.2 del Budnick. Cuarta Edición. Página 834.

(**Bienes raíces**) A un gran conglomerado multinacional le interesa comprar terrenos de primera calidad y provistos de muelles o paseos de entablado en uno de los principales lugares de veraneo en el océano. El conglomerado desea adquirir un lote rectangular situado en ese lugar. La única restricción es que tenga una superficie de 100000 pies cuadrados. La figura ofrece un diagrama del terreno: la x es el frente del paseo de entablado y la y indica el fondo del lote (medidos ambos en pies). El dueño de la propiedad ha fijado a los lotes un precio de \$5000 por pie de frente a lo largo del paseo de entablado y de \$2000 por pie de fondo a partir del paseo. El conglomerado desea determinar las dimensiones del lote que minimicen el costo total de compra.



Solución.

Área cercada: $A = x\,y$

Puesto que el área cercada es conocida, se tiene:

$x\,y = 100000$ (Ecuación 1)

La función objetivo es el costo de la cerca a utilizar, que se expresa de la siguiente manera:

$C = 5000\,x + 2000\,y$ (Ecuación 2)

Es necesario expresar la función objetivo C en función de una sola variable. De la ecuación (1) se despeja la variable y:

$$y = \frac{100000}{x} \qquad \text{(Ecuación 3)}$$

Se sustituye la ecuación (3) en la ecuación (2):

$$C(x) = 5000\,x + 2000\left(\frac{100000}{x}\right)$$

$$C(x) = 5000\,x + \frac{200000000}{x} \qquad \text{(Ecuación 4)}$$

Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos.

Para un valor extremo de la cantidad de material:

$$\frac{dC}{dx} = 0 \qquad \text{(Condición 1)}$$

Al derivar la ecuación (4):

$$\frac{dC}{dx} = 5000 - \frac{200000000}{x^2} \qquad \text{(Ecuación 5)}$$

Al aplicar la condición (1):

$$5000 - \frac{200000000}{x^2} = 0$$

Resolver la ecuación anterior con el objeto de determinar los valores críticos.

$$\frac{200000000}{x^2} = 5000$$

$$x^2 = \frac{200000000}{5000}$$

$x^2 = 40000$

$$x = \pm\sqrt{40000}$$

$x = \pm 200$

$x_1 = -200$

$x_2 = 200$

Valores críticos: $x = -200$ y $x = 200$.

Puesto que se trata de números positivos, se analiza $x = 200$.

Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos.

Al derivar la ecuación (5):

$$\frac{d^2C}{dx^2}=\frac{400000000}{x^3}$$

Al evaluar en x = 200:

$$\left.\frac{d^2C}{dx^2}\right|_{x=200}=\frac{400000000}{(200)^3}=50$$

Puesto que $\left.\frac{d^2C}{dx^2}\right|_{x=200}>0$, la función $C(x)=5000\,x+\frac{200000000}{x}$ presenta un mínimo relativo en x = 200.

El correspondiente valor de y se obtiene mediante la sustitución de x = 200 en la ecuación (3):

$$y=\frac{100000}{200}$$

y = 500

Conclusión.

Las dimensiones buscadas son:

x = 200 metros

y = 500 metros