Ejemplo 5. Sección 4.8 del Zill – Wright. Cuarta Edición. Página 238. Example 5. Section 4.8 from Zill – Wright. Fourth Edition. Page 238.

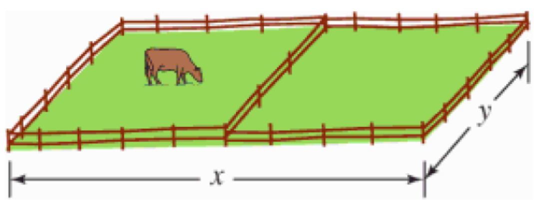
Cerca mínima. Un granjero intenta delimitar un terreno rectangular que tenga un área de 1500 m^2. El terreno estará cercado y dividido en dos partes iguales por medio de una cerca adicional paralela a dos lados. Encuentre las dimensiones del terreno que requiere la menor cantidad de cerca.

Least Fencing. A rancher intends to mark off a rectangular plot of land that will have an area of 1500 m^2. The plot will be fenced and divided into two equal portions by an additional fence parallel to two sides. Find the dimensions of the land that require the least amount of fencing.

Solución.

Sean x e y las dimensiones del terreno.

En la figura siguiente se ilustra el terreno a cercar.



Área cercada: $A = x\,y$

Puesto que el área cercada es conocida, se tiene:

$x\,y = 1500$ (Ecuación 1)

La función objetivo es la cantidad de cerca a utilizar, que se expresa de la siguiente manera:

$C = 2\,x + 3\,y$ (Ecuación 2)

Es necesario expresar la función objetivo C en función de una sola variable. De la ecuación (1) se despeja la variable y:

$$y = \frac{1500}{x}$$ (Ecuación 3)

Se sustituye la ecuación (3) en la ecuación (2):

$$C(x) = 2\,x + 3\left(\frac{1500}{x}\right)$$

$$C(x) = 2x + \frac{4500}{x} \qquad \text{(Ecuación 4)}$$

Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos.

Para un valor extremo de la cantidad de material:

$$\frac{dC}{dx} = 0 \qquad \text{(Condición 1)}$$

Al derivar la ecuación (4):

$$\frac{dC}{dx} = 2 - \frac{4500}{x^2} \qquad \text{(Ecuación 5)}$$

Al aplicar la condición (1):

$$2 - \frac{4500}{x^2} = 0$$

Resolver la ecuación anterior con el objeto de determinar los valores críticos.

$$\frac{4500}{x^2} = 2$$

$$x^2 = \frac{4500}{2}$$

$$x^2 = 2250$$

$$x = \pm\sqrt{2250}$$

$$x = \pm 15\sqrt{10}$$

$$x_1 = -15\sqrt{10}$$

$$x_2 = 15\sqrt{10}$$

Valores críticos: $x = -15\sqrt{10}$ y $x = 15\sqrt{10}$.

Puesto que se trata de números positivos, se analiza $x = 15\sqrt{10}$.

Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos.

Al derivar la ecuación (5):

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{9000}{x^3}$$

Al evaluar en $x=15\sqrt{10}$:

$$\left.\frac{d^2C}{dx^2}\right|_{x=15\sqrt{10}}=\frac{9000}{(15\sqrt{10})^3}=\frac{4}{15\sqrt{10}}$$

Puesto que $\left.\frac{d^2C}{dx^2}\right|_{x=15\sqrt{10}}>0$, la función $C(x)=2x+\frac{4500}{x}$ presenta un mínimo relativo en $x=15\sqrt{10}$.

El correspondiente valor de y se obtiene mediante la sustitución de $x=15\sqrt{10}$ en la ecuación (3):

$$y=\frac{1500}{15\sqrt{10}}$$

$$y=10\sqrt{10}$$

Conclusión.

Las dimensiones buscadas son:

$x=15\sqrt{10}$ metros

$y=10\sqrt{10}$ metros