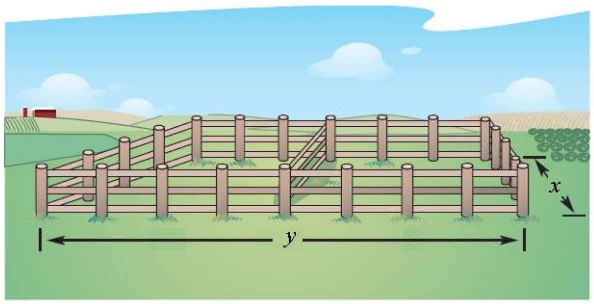
Ejemplo 2. Sección 3.4 del Purcell. Novena Edición. Página 167.

Un granjero tiene 100 metros de cerca de alambre con la cual planea construir dos corrales adyacentes, como se muestra en la figura. ¿Cuáles son las dimensiones que encierran el área máxima?



Solución.

Cantidad de cerca a utilizar: $C = 3\,x + 2\,y$

Puesto que la cantidad de cerca es conocida, se tiene:

$3\,x + 2\,y = 100$ (Ecuación 1)

La función objetivo es el área cercada, que se expresa de la siguiente manera:

$A = x\,y$ (Ecuación 2)

Es necesario expresar la función objetivo A en función de una sola variable. De la ecuación (1) se despeja la variable y:

$$y = \frac{100 - 3x}{2}$$

$$y = 50 - \tfrac{3}{2}x \qquad \text{(Ecuación 3)}$$

Se sustituye la ecuación (3) en la ecuación (2):

$$A(x) = x(50 - \tfrac{3}{2}x)$$

$$A(x) = 50x - \tfrac{3}{2}x^2$$

$$A(x) = -\tfrac{3}{2}x^2 + 50x\,,\ 0 \le x \le \tfrac{100}{3} \qquad \text{(Ecuación 4)}$$

Se ilustrarán dos mecanismos para obtener el extremo de la función $A\,(x)$.

Primer mecanismo de solución.

La función $A\,(x)$ es una función cuadrática. Al comparar la ecuación (4) con $A\,(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, se tiene que:

$a = -\frac{3}{2}$, b = 50, c = 0

Siendo $a = -\frac{3}{2}$ (a < 0), la función cuadrática es cóncava hacia abajo y por lo tanto presenta un máximo.

El valor de la abcisa que genera el punto máximo está dado por:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Al sustituir valores:

$$x = -\frac{(50)}{2(-\frac{3}{2})}$$

$$x = \frac{50}{3}$$

El correspondiente valor de y se obtiene mediante la sustitución de $x = \frac{50}{3}$ en la ecuación (3):

$$y = 50 - \frac{3}{2}(\frac{50}{3})$$

y = 50 – 25

y = 25

Conclusión.

Las dimensiones buscadas son:

$x = \frac{50}{3}$ pies

y = 25 pies

Segundo mecanismo de solución.

Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos.

Para un valor extremo del área:

$$\frac{dA}{dx} = 0 \qquad \text{(Condición 1)}$$

Al derivar la ecuación (4):

$$\frac{dA}{dx} = -3x + 50 \qquad \text{(Ecuación 5)}$$

Al aplicar la condición (1):

$-3x + 50 = 0$

Resolver la ecuación anterior con el objeto de determinar los valores críticos.

$3x = 50$

$x = \frac{50}{3}$

Valor crítico: $x = \frac{50}{3}$.

Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos.

Al derivar la ecuación (5):

$$\frac{d^2A}{dx^2} = -3$$

Al evaluar en $x = \frac{50}{3}$:

$$\left.\frac{d^2A}{dx^2}\right|_{x=\frac{50}{3}} = -3$$

Puesto que $\left.\frac{d^2A}{dx^2}\right|_{x=\frac{50}{3}} < 0$, la función $A(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 50x$ presenta un máximo relativo en $x = \frac{50}{3}$.

El correspondiente valor de y se obtiene mediante la sustitución de $x = \frac{50}{3}$ en la ecuación (3):

$y = 50 - \frac{3}{2}\left(\frac{50}{3}\right)$

$y = 50 - 25$

$y = 25$

Finalmente, aplicamos el método tabular para determinar el extremo absoluto del área. La aplicación del método tabular consiste en evaluar la función objetivo en cada valor crítico así como en los extremos del intervalo que representa el dominio de la función.

En $x = 0$:

$A(0) = -\frac{3}{2}(0)^2 + 50(0)$

$A(0) = 0$

En $x = \frac{50}{3}$:

$A(\frac{50}{3})=-\frac{3}{2}(\frac{50}{3})^2+50(\frac{50}{3})$

$A(\frac{50}{3})=-\frac{3}{2}(\frac{2500}{9})+\frac{2500}{3}$

$A(\frac{50}{3})=-\frac{1250}{3}+\frac{2500}{3}$

$A(\frac{50}{3})=\frac{1250}{3}$

En $x=\frac{100}{3}$:

$A(\frac{100}{3})=-\frac{3}{2}(\frac{100}{3})^2+50(\frac{100}{3})$

$A(\frac{100}{3})=-\frac{3}{2}(\frac{10000}{9})+\frac{5000}{3}$

$A(\frac{100}{3})=-\frac{5000}{3}+\frac{5000}{3}$

$A(\frac{100}{3})=0$

x	0	$\frac{50}{3}$	$\frac{100}{3}$
$A\,(x)$	0	$\frac{1250}{3}$	0

El valor máximo del área ocurre en $x=\frac{50}{3}$.

El valor máximo del área es: $A_{max}=\frac{1250}{3}$.

Conclusión.

Las dimensiones buscadas son:

$x=\frac{50}{3}$ pies

y = 25 pies