

Ejemplo 2. Sección 5-2 del Arya – Lardner. Cuarta Edición. Página 194. Ejemplo 2.
Sección 5-2 del Arya – Lardner. Quinta Edición. Página 190.

(Cercado) Un granjero tiene 200 metros de cerca con la cual puede delimitar un terreno rectangular. Un lado del terreno puede aprovechar una cerca ya existente. ¿Cuál es el área máxima que puede cercarse?

Solución.

Sean x e y las dimensiones del terreno.

En la figura siguiente se ilustra el terreno a cercar.



Cantidad de cerca a utilizar: $C = x + 2y$

Puesto que la cantidad de cerca es conocida, se tiene:

$$x + 2y = 200 \quad \text{(Ecuación 1)}$$

La función objetivo es el área cercada, que se expresa de la siguiente manera:

$$A = xy \quad \text{(Ecuación 2)}$$

Es necesario expresar la función objetivo A en función de una sola variable. De la ecuación (1) se despeja la variable y :

$$y = \frac{200 - x}{2}$$

$$y = 100 - \frac{1}{2}x \quad \text{(Ecuación 3)}$$

Se sustituye la ecuación (3) en la ecuación (2):

$$A(x) = x(100 - \frac{1}{2}x)$$

$$A(x) = 100x - \frac{1}{2}x^2$$

$$A(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 100x, \quad 0 \leq x \leq 200 \quad \text{(Ecuación 4)}$$

Se ilustrarán dos mecanismos para obtener el extremo de la función $A(x)$.

Primer mecanismo de solución.

La función $A(x)$ es una función cuadrática. Al comparar la ecuación (4) con

$A(x) = ax^2 + bx + c$, se tiene que:

$$a = -\frac{1}{2}, b = 100, c = 0$$

Siendo $a = -\frac{1}{2}$ ($a < 0$), la función cuadrática es cóncava hacia abajo y por lo tanto presenta un máximo.

El valor de la abcisa que genera el punto máximo está dado por:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Al sustituir valores:

$$x = -\frac{(100)}{2(-\frac{1}{2})}$$

$$x = 100$$

El correspondiente valor de y se obtiene mediante la sustitución de $x = 100$ en la ecuación (3):

$$y = 100 - \frac{1}{2}(100)$$

$$y = 100 - 50$$

$$y = 50$$

Conclusión.

Las dimensiones que generan el área máxima son:

$$x = 100 \text{ m}$$

$$y = 50 \text{ m}$$

Área máxima.

Para obtener el área máxima, se evalúa la función área (Ecuación 4) en $x = 100$.

$$A_{max} = A(100)$$

$$A(100) = -\frac{1}{2}(100)^2 + 100(100)$$

$$A(100) = -\frac{1}{2}(10000) + 10000$$

$$A(100) = -5000 + 10000$$

$$A(100) = 5000$$

Conclusión.

El área máxima es 5000 m^2 .

Segundo mecanismo de solución.

Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos.

Para un valor extremo del área:

$$\frac{dA}{dx} = 0 \quad (\text{Condición 1})$$

Al derivar la ecuación (4):

$$\frac{dA}{dx} = -x + 100 \quad (\text{Ecuación 5})$$

Al aplicar la condición (1):

$$-x + 100 = 0$$

Resolver la ecuación anterior con el objeto de determinar los valores críticos.

$$x = 100$$

Valor crítico: $x = 100$.

Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos.

Al derivar la ecuación (5):

$$\frac{d^2A}{dx^2} = -1$$

Al evaluar en $x = 100$:

$$\left. \frac{d^2A}{dx^2} \right|_{x=100} = -1$$

Puesto que $\left. \frac{d^2A}{dx^2} \right|_{x=100} < 0$, la función $A(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 100x$ presenta un máximo relativo en

$x = 100$.

El correspondiente valor de y se obtiene mediante la sustitución de $x = 100$ en la ecuación (3):

$$y = 100 - \frac{1}{2}(100)$$

$$y = 100 - 50$$

$$y = 50$$

Finalmente, aplicamos el método tabular para determinar el extremo absoluto del área. La aplicación del método tabular consiste en evaluar la función objetivo en cada valor crítico así como en los extremos del intervalo que representa el dominio de la función.

En $x = 0$:

$$A(0) = -\frac{1}{2}(0)^2 + 100(0)$$

$$A(0) = 0$$

En $x = 100$:

$$A(100) = -\frac{1}{2}(100)^2 + 100(100)$$

$$A(100) = -\frac{1}{2}(10000) + 10000$$

$$A(100) = -5000 + 10000$$

$$A(100) = 5000$$

En $x = 200$:

$$A(200) = -\frac{1}{2}(200)^2 + 100(200)$$

$$A(200) = -\frac{1}{2}(40000) + 20000$$

$$A(200) = -20000 + 20000$$

$$A(200) = 0$$

x	0	100	200
$A(x)$	0	5000	0

El valor máximo del área ocurre en $x = 100$.

El valor máximo del área es: $A_{\max} = 5000$.

Las dimensiones que generan el área máxima son:

$$x = 100 \text{ m}$$

$$y = 50 \text{ m}$$

Conclusión.

El área máxima es 5000 m^2 .

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **Derivadas, Aplicaciones de las derivadas**, perteneciente a la asignatura **Cálculo Diferencial**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

<http://www.tutoruniversitario.com/>

Si Usted requiere la resolución de ejercicios adicionales acerca de ésta u otras asignaturas, contáctenos a través de los siguientes medios:

- WhatsApp: +58-4249744352 (En forma directa o desde nuestra página web).
- E-mail: medinawj@gmail.com

Lista de asignaturas en las cuales podemos ayudarle:

Cálculo Diferencial.	Cálculo Integral.	Cálculo Vectorial.
Ecuaciones Diferenciales.	Trigonometría.	Matemáticas Aplicadas.
Matemáticas Financieras.	Álgebra Lineal.	Métodos Numéricos.
Estadística.	Física (Mecánica).	Física (Electricidad).
Mecánica Vectorial (Estática).	Química Inorgánica.	Fisicoquímica.
Termodinámica.	Termodinámica Química.	Mecánica de Fluidos.
Fenómenos de Transporte.	Transferencia de Calor.	Ingeniería Económica.