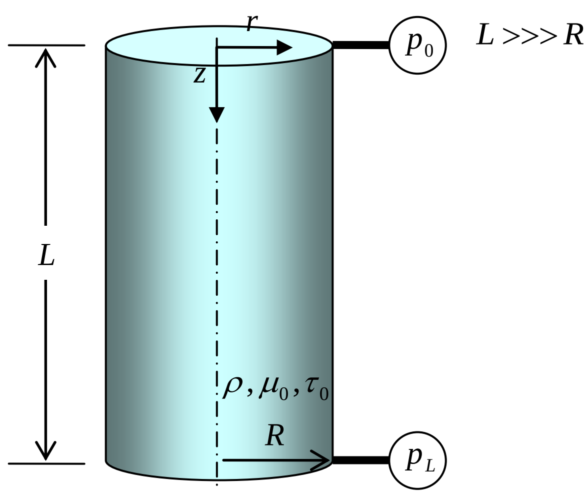
Ejemplo 2.3-2 del Bird. Página 2-16. Deducción de la ecuación de Buckingham – Reiner. Problema 8B.6 del Bird. Segunda Edición. Página 303.

Flujo de Bingham en un tubo capilar. Un fluido cuyo comportamiento se ajusta muy aproximadamente al modelo de Bingham circula por un tubo vertical en virtud de un gradiente de presión y/o la aceleración de la gravedad. El radio y la longitud del tubo son, respectivamente, R y L. Se desea obtener una relación entre la velocidad volumétrica de flujo, Q, y la combinación de las fuerzas de presión y gravedad que actúan sobre el fluido.



Solución.

El ejercicio propuesto difiere del ejercicio 1 sólo en el tipo de fluido.

Condiciones:

Estado estacionario.

Flujo laminar.

Propiedades del fluido constantes (ρ, μ).

Fluido Newtoniano.

Efectos de borde despreciables.

Flujo longitudinal (en dirección z): $v_r = 0$, $v_\theta = 0$, $v_z \neq 0$.

La velocidad varía en función de r: $v_z = v_z(r)$.

Balance de cantidad de movimiento.

$$2\pi r L \tau_{rz}\big|_r - 2\pi r L \tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} + 2\pi r \Delta r L \rho g_z + 2\pi r \Delta r (p_0 - p_L) = 0$$

g_z es la componente gravitacional en la dirección del flujo. En este caso $g_z = g$.

$$2\pi r L \tau_{rz}\big|_r - 2\pi r L \tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} + 2\pi r \Delta r L \rho g + 2\pi r \Delta r (p_0 - p_L) = 0 \qquad (1)$$

Al dividir entre 2 π L:

$$r\tau_{rz}\big|_r - r\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} + r\Delta r \rho g_z + r\Delta r \frac{(p_0 - p_L)}{L} = 0$$

$$r\tau_{rz}\big|_r - r\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} + \left(\rho g + \frac{p_0 - p_L}{L}\right) r\Delta r = 0$$

Sea $\rho g + \dfrac{p_0 - p_L}{L} = \dfrac{P_0 - P_L}{L}$

$$r\tau_{rz}\big|_r - r\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} + \left(\frac{P_0 - P_L}{L}\right) r\Delta r = 0$$

$$r\tau_{rz}\big|_r - r\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} = -\left(\frac{P_0 - P_L}{L}\right) r\Delta r$$

Al multiplicar por (– 1) la ecuación anterior:

$$r\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} - r\tau_{rz}\big|_r = \left(\frac{P_0 - P_L}{L}\right) r\Delta r$$

$$\frac{r\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} - r\tau_{rz}\big|_r}{\Delta r} = \left(\frac{P_0 - P_L}{L}\right) r$$

Tomando el límite cuando $\Delta r \to 0$ en la ecuación anterior:

$$\lim_{\Delta r\to 0} \frac{r\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} - r\tau_{rz}\big|_r}{\Delta r} = \lim_{\Delta r\to 0} \left(\frac{P_0 - P_L}{L}\right) r$$

$$\lim_{\Delta r\to 0} \frac{r\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} - r\tau_{rz}\big|_r}{\Delta r} = \left(\frac{P_0 - P_L}{L}\right) r$$

Aplicando la definición de derivada:

$$\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = \left(\frac{P_0 - P_L}{L}\right) r$$

Al separar variables en la ecuación anterior:

$$d\,(r\,\tau_{rz})=\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)r\,d\,r$$

Integrando ambos miembros de la ecuación:

$$\int d\,(r\,\tau_{rz})=\int\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)r\,d\,r$$

$$\int d\,(r\,\tau_{rz})=\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)\int r\,d\,r$$

La integración conduce a:

$$r\,\tau_{rz}=\left(\frac{P_0-P_L}{2L}\right)\left(\frac{r^2}{2}\right)+C_1$$

$$r\,\tau_{rz}=\left(\frac{P_0-P_L}{2L}\right)r^2+C_1$$

$$\tau_{rz}=\left(\frac{P_0-P_L}{2L}\right)r+\frac{C_1}{r} \qquad (2)$$

Condición de borde: Para $r = 0$, $\tau_{rz} \neq \infty$.

$C_1 = 0$ (3)

Al sustituir la ecuación (3) en la ecuación (2):

$$\tau_{rz}=\left(\frac{P_0-P_L}{2L}\right)r \qquad (4)$$

Distribución de velocidad.

Fluido de Bingham.

$$\tau_{rz}=\tau_0-\mu_0\frac{dv_z}{dr} \qquad (5)$$

Al sustituir la ecuación (5) en la ecuación (4):

$$\tau_0-\mu_0\frac{dv_z}{dr}=\left(\frac{P_0-P_L}{2L}\right)r$$

Al separar las variables en la ecuación anterior:

$$dv_z = \left(-\frac{P_0 - P_L}{2\mu_0 L} r + \frac{\tau_0}{\mu_0} \right) dr$$

Al integrar ambos miembros de la ecuación:

$$\int dv_z = \int \left(-\frac{P_0 - P_L}{2\mu_0 L} r + \frac{\tau_0}{\mu_0} \right) dr$$

$$\int dv_z = -\frac{P_0 - P_L}{2\mu_0 L} \int r\, dr + \frac{\tau_0}{\mu_0} \int dr$$

La integración conduce a:

$$v_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right)\left(\frac{r^2}{2} \right) + \frac{\tau_0}{\mu_0} r + C_2$$

$$v_z = -\frac{P_0 - P_L}{4\mu_0 L} r^2 + \frac{\tau_0}{\mu_0} r + C_2 \qquad (6)$$

Condiciones de borde: Para $r = R$, $v_z = 0$.

Al sustituir en la ecuación (6):

$$0 = -\frac{P_0 - P_L}{4\mu_0 L} R^2 + \frac{\tau_0}{\mu_0} R + C_2$$

Al despejar C_2 en la ecuación anterior:

$$C_2 = \frac{P_0 - P_L}{4\mu_0 L} R^2 - \frac{\tau_0}{\mu_0} R \qquad (7)$$

Al sustituir la ecuación (7) en la ecuación (6):

$$v_z = -\frac{P_0 - P_L}{4\mu_0 L} r^2 + \frac{\tau_0}{\mu_0} r + \frac{P_0 - P_L}{4\mu_0 L} R^2 - \frac{\tau_0}{\mu_0} R$$

$$v_z = \frac{P_0 - P_L}{4\mu_0 L} (R^2 - r^2) - \frac{\tau_0}{\mu_0} (R - r)$$

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L) R^2}{4\mu_0 L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) - \frac{\tau_0 R}{\mu_0} \left(1 - \frac{r}{R} \right)$$

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu_0 L}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] - \frac{\tau_0 R}{\mu_0}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)\right] \qquad r \geq r_0 \tag{8}$$

Determinación del radio del tapón (r_0).

En $r = r_0$, $v_z = v_{z,max}$: $\dfrac{d v_z}{d r} = 0$

De la ecuación (8):

$$\frac{d v_z}{d r} = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu_0 L}\left[-2\left(\frac{r}{R}\right)\left(\frac{1}{R}\right)\right] - \frac{\tau_0 R}{\mu_0}\left(-\frac{1}{R}\right)$$

$$\frac{d v_z}{d r} = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu_0 L}\left(-\frac{2r}{R^2}\right) - \frac{\tau_0 R}{\mu_0}\left(-\frac{1}{R}\right)$$

$$\frac{d v_z}{d r} = -\frac{P_0 - P_L}{2\mu_0 L} r + \frac{\tau_0}{\mu_0}$$

$$\left.\frac{d v_z}{d r}\right|_{r=r_0} = -\frac{P_0 - P_L}{2\mu_0 L} r_0 + \frac{\tau_0}{\mu_0}$$

$$-\frac{P_0 - P_L}{2\mu_0 L} r_0 + \frac{\tau_0}{\mu_0} = 0$$

$$\frac{P_0 - P_L}{2\mu_0 L} r_0 = \frac{\tau_0}{\mu_0}$$

$$\frac{P_0 - P_L}{2L} r_0 = \tau_0$$

$$r_0 = \frac{2\tau_0 L}{P_0 - P_L} \tag{9}$$

$$\tau_0 = \frac{(P_0 - P_L) r_0}{2L} \tag{10}$$

De la ecuación (4) se obtiene el flujo de cantidad de movimiento en la pared del tubo:

$$\tau_R = \left(\frac{P_0 - P_L}{2L}\right) R \tag{11}$$

Al dividir las ecuaciones (10) y (11):

$$\frac{\tau_0}{\tau_R}=\frac{\dfrac{(P_0-P_L)\,r_0}{2\,L}}{\left(\dfrac{P_0-P_L}{2\,L}\right)R}$$

$$\frac{\tau_0}{\tau_R}=\frac{r_0}{R} \qquad (12)$$

Sea $\lambda=\dfrac{r_0}{R}$ (13)

Luego

$r_0 = \lambda\, R$ (14)

$$\tau_0=\frac{(P_0-P_L)\,\lambda\, R}{2\,L} \qquad (15)$$

Al sustituir la ecuación (15) en la ecuación (8)

$$v_z=\frac{(P_0-P_L)\,R^2}{4\,\mu_0 L}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]-\frac{\left[\dfrac{(P_0-P_L)\,\lambda\, R}{2\,L}\right]R}{\mu_0}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)\right]$$

$$v_z=\frac{(P_0-P_L)\,R^2}{4\,\mu_0 L}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]-\frac{(P_0-P_L)\,\lambda\, R^2}{2\,\mu_0 L}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)\right]$$

$$v_z=\frac{(P_0-P_L)\,R^2}{4\,\mu_0 L}\left\{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2-2\,\lambda\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)\right]\right\}$$

$$v_z=\frac{(P_0-P_L)\,R^2}{4\,\mu_0 L}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2-2\,\lambda+2\,\lambda\left(\frac{r}{R}\right)\right]$$

$$v_z=\frac{(P_0-P_L)\,R^2}{4\,\mu_0 L}\left[1-2\,\lambda+2\,\lambda\left(\frac{r}{R}\right)-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad (16)$$

Velocidad del tapón.

En $r = r_0$, de la ecuación (16):

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu_0 L}\left[1 - 2\lambda + 2\lambda\left(\frac{r_0}{R}\right) - \left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right]$$

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu_0 L}[1 - 2\lambda + 2\lambda(\lambda) - (\lambda)^2]$$

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu_0 L}(1 - 2\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^2)$$

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu_0 L}(1 - 2\lambda + \lambda^2)$$

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu_0 L}(1 - \lambda)^2 \qquad (17)$$

El perfil de velocidades queda como:

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu_0 L}\left[1 - 2\lambda + 2\lambda\left(\frac{r}{R}\right) - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad r \geq r_0 \qquad (18a)$$

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu_0 L}(1 - \lambda)^2 \qquad r < r_0 \qquad (18b)$$

Velocidad máxima.

La velocidad máxima corresponde a la velocidad del tapón.

$$v_{z,\max} = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu_0 L}(1 - \lambda)^2 \qquad (19)$$

Caudal.

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^R v_z\, r\, dr\, d\theta \qquad (20)$$

El caudal es la suma del caudal del tapón y del caudal del fluido que se desliza en capas.

$$Q = Q_1 + Q_2 \qquad (21)$$

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} v_z^{<}\, r\, dr\, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{r_0}^R v_z^{>}\, r\, dr\, d\theta \qquad (22)$$

Caudal del tapón.

$$Q_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} v_z^{<}\, r\, dr\, d\theta \qquad (23)$$

Al sustituir la ecuación (18b) en la ecuación (23):

$$Q_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}\left[\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu_0 L}(1-\lambda)^2\right]r\,dr\,d\theta$$

$$Q_1 = \frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu_0 L}(1-\lambda)^2\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} r\,dr\,d\theta$$

$$Q_1 = \frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu_0 L}(1-\lambda)^2\int_0^{2\pi}\left.\left(\frac{r^2}{2}\right)\right|_0^{r_0} d\theta$$

$$Q_1 = \frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu_0 L}(1-\lambda)^2\int_0^{2\pi}\frac{r_0^2}{2}d\theta$$

$$Q_1 = \frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu_0 L}(1-\lambda)^2\frac{r_0^2}{2}\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$Q_1 = \frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu_0 L}(1-\lambda)^2\frac{r_0^2}{2}(2\pi)$$

$$Q_1 = \frac{\pi(P_0-P_L)R^2}{8\mu_0 L}(1-\lambda)^2(2r_0^2)$$

$$Q_1 = \frac{\pi(P_0-P_L)R^2}{8\mu_0 L}(1-\lambda)^2[2(\lambda R)^2]$$

$$Q_1 = \frac{\pi(P_0-P_L)R^2}{8\mu_0 L}(1-\lambda)^2(2\lambda^2R^2)$$

$$Q_1 = \frac{\pi(P_0-P_L)R^4}{8\mu_0 L}[2\lambda^2(1-\lambda)^2] \qquad (24)$$

$$Q_1 = \frac{\pi(P_0-P_L)R^4}{8\mu_0 L}\left\{2\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\left[1-\left(\frac{r_0}{R}\right)\right]^2\right\}$$

$$Q_1 = \frac{\pi(P_0-P_L)R^4}{8\mu_0 L}\left\{2\left(\frac{\tau_0}{\tau_R}\right)^2\left[1-\left(\frac{\tau_0}{\tau_R}\right)\right]^2\right\}$$

La ecuación (24) predice que si $r_0 = 0$ ($\lambda = 0$), entonces el caudal del tapón es nulo, lo cual es de esperarse, puesto que dicho tapón no existiría, mientras que si $r_0 = R$ ($\lambda = 1$), sólo se "desplazaría" el tapón a lo largo del tubo, encontrándose también que el caudal es nulo, pues el tapón no podría desplazarse.

Caudal del fluido que se desliza en capas.

$$Q_2=\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} v_z > r\,dr\,d\theta \qquad (25)$$

Al sustituir la ecuación (18a) en la ecuación (25):

$$Q_2=\int_0^{2\pi}\int_{r_0}^{R}\left\{\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu_0 L}\left[1-2\lambda+2\lambda\left(\frac{r}{R}\right)-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\right\}r\,dr\,d\theta$$

$$Q_2=\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu_0 L}\int_0^{2\pi}\int_{r_0}^{R}\left[1-2\lambda+2\lambda\left(\frac{r}{R}\right)-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]r\,dr\,d\theta$$

$$Q_2=\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu_0 L}\int_0^{2\pi}\int_{r_0}^{R}\left(1-2\lambda+\frac{2\lambda r}{R}-\frac{r^2}{R^2}\right)r\,dr\,d\theta$$

$$Q_2=\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu_0 L}\int_0^{2\pi}\int_{r_0}^{R}\left(r-2\lambda r+\frac{2\lambda r^2}{R}-\frac{r^3}{R^2}\right)dr\,d\theta$$

$$Q_2=\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu_0 L}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}-\lambda r^2+\frac{2\lambda r^3}{3R}-\frac{r^4}{4R^2}\right)\Bigg|_{r_0}^{R}d\theta$$

$$Q_2=\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu_0 L}\int_0^{2\pi}\left[\frac{R^2-r_0^2}{2}-\lambda(R^2-r_0^2)+\frac{2\lambda(R^3-r_0^3)}{3R}-\frac{R^4-r_0^4}{4R^2}\right]d\theta$$

$$Q_2=\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu_0 L}\left[\frac{R^2-r_0^2}{2}-\lambda(R^2-r_0^2)+\frac{2\lambda(R^3-r_0^3)}{3R}-\frac{R^4-r_0^4}{4R^2}\right]\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$Q_2=\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu_0 L}\left[\frac{R^2-r_0^2}{2}-\lambda(R^2-r_0^2)+\frac{2\lambda(R^3-r_0^3)}{3R}-\frac{R^4-r_0^4}{4R^2}\right](2\pi)$$

$$Q_2=\frac{\pi(P_0-P_L)R^2}{4\mu_0 L}\left[R^2-r_0^2-2\lambda(R^2-r_0^2)+\frac{4\lambda(R^3-r_0^3)}{3R}-\frac{R^4-r_0^4}{2R^2}\right]$$

$$Q_2=\frac{\pi(P_0-P_L)R^4}{4\mu_0 L}\left[\frac{R^2-r_0^2}{R^2}-2\lambda\left(\frac{R^2-r_0^2}{R^2}\right)+\frac{4\lambda(R^3-r_0^3)}{3R^3}-\frac{R^4-r_0^4}{2R^4}\right]$$

$$Q_2=\frac{\pi(P_0-P_L)R^4}{4\mu_0L}\left[1-\frac{r_0^2}{R^2}-2\lambda\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}\right)+\frac{4\lambda}{3}\left(1-\frac{r_0^3}{R^3}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_0^4}{R^4}\right)\right]$$

$$Q_2=\frac{\pi(P_0-P_L)R^4}{4\mu_0L}\left\{1-\left(\frac{r_0}{R}\right)^2-2\lambda\left[1-\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right]+\frac{4\lambda}{3}\left[1-\left(\frac{r_0}{R}\right)^3\right]-\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{r_0}{R}\right)^4\right]\right\}$$

$$Q_2=\frac{\pi(P_0-P_L)R^4}{4\mu_0L}\{1-(\lambda)^2-2\lambda[1-(\lambda)^2]+\tfrac{4}{3}\lambda[1-(\lambda)^3]-\tfrac{1}{2}[1-(\lambda)^4]\}$$

$$Q_2=\frac{\pi(P_0-P_L)R^4}{4\mu_0L}[1-\lambda^2-2\lambda(1-\lambda^2)+\tfrac{4}{3}\lambda(1-\lambda^3)-\tfrac{1}{2}(1-\lambda^4)]$$

$$Q_2=\frac{\pi(P_0-P_L)R^4}{4\mu_0L}(1-\lambda^2-2\lambda+2\lambda^3+\tfrac{4}{3}\lambda-\tfrac{4}{3}\lambda^4-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\lambda^4)$$

$$Q_2=\frac{\pi(P_0-P_L)R^4}{4\mu_0L}(\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{3}\lambda-\lambda^2+2\lambda^3-\tfrac{5}{6}\lambda^4)$$

$$Q_2=\frac{\pi(P_0-P_L)R^4}{8\mu_0L}(1-\tfrac{4}{3}\lambda-2\lambda^2+4\lambda^3-\tfrac{5}{3}\lambda^4) \qquad (26)$$

$$Q_2=\frac{\pi(P_0-P_L)R^4}{8\mu_0L}\left[1-\frac{4}{3}\left(\frac{r_0}{R}\right)-2\left(\frac{r_0}{R}\right)^2+4\left(\frac{r_0}{R}\right)^3-\frac{5}{3}\left(\frac{r_0}{R}\right)^4\right]$$

$$Q_2=\frac{\pi(P_0-P_L)R^4}{8\mu_0L}\left[1-\frac{4}{3}\left(\frac{\tau_0}{\tau_R}\right)-2\left(\frac{\tau_0}{\tau_R}\right)^2+4\left(\frac{\tau_0}{\tau_R}\right)^3-\frac{5}{3}\left(\frac{\tau_0}{\tau_R}\right)^4\right]$$

La ecuación (26) predice que si r_0 = 0 (λ = 0), entonces el caudal del fluido que se desliza en capas es el correspondiente a un fluido newtoniano en un tubo circular (ejercicio 1), lo cual es de esperarse, puesto que el tapón no existiría y el fluido de Bingham fluiría tal como lo hace un fluido newtoniano, mientras que si r_0 = R (λ = 1), sólo se "desplazaría" el tapón a lo largo del tubo, encontrándose que el flujo es nulo, pues el tapón no podría desplazarse.

Flujo total.

Al sustituir las ecuaciones (24) y (26) en la ecuación (21):

$$Q=\frac{\pi(P_0-P_L)R^4}{8\mu_0L}[2\lambda^2(1-\lambda)^2]+\frac{\pi(P_0-P_L)R^4}{8\mu_0L}(1-\tfrac{4}{3}\lambda-2\lambda^2+4\lambda^3-\tfrac{5}{3}\lambda^4)$$

$$Q=\frac{\pi(P_0-P_L)R^4}{8\mu_0 L}[2\lambda^2(1-\lambda)^2+1-\tfrac{4}{3}\lambda-2\lambda^2+4\lambda^3-\tfrac{5}{3}\lambda^4]$$

$$Q=\frac{\pi(P_0-P_L)R^4}{8\mu_0 L}[2\lambda^2(1-2\lambda+\lambda^2)+1-\tfrac{4}{3}\lambda-2\lambda^2+4\lambda^3-\tfrac{5}{3}\lambda^4]$$

$$Q=\frac{\pi(P_0-P_L)R^4}{8\mu_0 L}(2\lambda^2-4\lambda^3+2\lambda^4+1-\tfrac{4}{3}\lambda-2\lambda^2+4\lambda^3-\tfrac{5}{3}\lambda^4)$$

$$Q=\frac{\pi(P_0-P_L)R^4}{8\mu_0 L}(1-\tfrac{4}{3}\lambda+\tfrac{1}{3}\lambda^4) \qquad (27)$$

$$Q=\frac{\pi(P_0-P_L)R^4}{8\mu_0 L}\left[1-\frac{4}{3}\left(\frac{r_0}{R}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{r_0}{R}\right)^4\right]$$

$$Q=\frac{\pi(P_0-P_L)R^4}{8\mu_0 L}\left[1-\frac{4}{3}\left(\frac{\tau_0}{\tau_R}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{\tau_0}{\tau_R}\right)^4\right]$$

La ecuación (27) predice que si $r_0 = 0$ ($\lambda = 0$), entonces el caudal del fluido que se desliza en capas es el correspondiente a un fluido newtoniano en un tubo circular (ejercicio 1), lo cual es de esperarse, puesto que el tapón no existiría y el fluido de Bingham fluiría tal como lo hace un fluido newtoniano, mientras que si $r_0 = R$ ($\lambda = 1$), sólo se “desplazaría” el tapón a lo largo del tubo, encontrándose que el flujo es nulo, pues el tapón no podría desplazarse.

Velocidad media en el tubo (incluyendo el tapón).

$$<v_z>=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R v_z\, r\, dr\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^R r\, dr\, d\theta} \qquad (28)$$

La integral del numerador se corresponde con el caudal (Ecuación 27). Al sustituir la ecuación (27) en la ecuación (28):

$$<v_z>=\frac{\frac{\pi(P_0-P_L)R^4}{8\mu_0 L}(1-\tfrac{4}{3}\lambda+\tfrac{1}{3}\lambda^4)}{\int_0^{2\pi}\left(\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^R\right)d\theta}$$

$$< v_z >= \frac{\dfrac{\pi (P_0 - P_L) R^4}{8 \mu_0 L} (1 - \tfrac{4}{3}\lambda + \tfrac{1}{3}\lambda^4)}{\int_0^{2\pi} \dfrac{R^2}{2} d\theta}$$

$$< v_z >= \frac{\dfrac{\pi (P_0 - P_L) R^4}{8 \mu_0 L} (1 - \tfrac{4}{3}\lambda + \tfrac{1}{3}\lambda^4)}{\dfrac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta}$$

$$< v_z >= \frac{\dfrac{\pi (P_0 - P_L) R^4}{8 \mu_0 L} (1 - \tfrac{4}{3}\lambda + \tfrac{1}{3}\lambda^4)}{\dfrac{R^2}{2} (2\pi)}$$

$$< v_z >= \frac{\dfrac{\pi (P_0 - P_L) R^4}{8 \mu_0 L} (1 - \tfrac{4}{3}\lambda + \tfrac{1}{3}\lambda^4)}{\pi R^2}$$

$$< v_z >= \frac{(P_0 - P_L) R^2}{8 \mu_0 L} (1 - \tfrac{4}{3}\lambda + \tfrac{1}{3}\lambda^4) \qquad (29)$$

$$< v_z >= \frac{(P_0 - P_L) R^2}{8 \mu_0 L} \left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{r_0}{R}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{r_0}{R}\right)^4 \right]$$

Velocidad media en la región de flujo (sin incluir el tapón).

$$< v_z >= \frac{\int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{R} v_z > r\, dr\, d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{R} r\, dr\, d\theta} \qquad (30)$$

La integral del numerador se corresponde con el caudal del fluido que se desplaza en capas (Ecuación 26). Al sustituir la ecuación (26) en la ecuación (30):

$$< v_z >= \frac{\dfrac{\pi (P_0 - P_L) R^4}{8 \mu_0 L} (1 - \tfrac{4}{3}\lambda - 2\lambda^2 + 4\lambda^3 - \tfrac{5}{3}\lambda^4)}{\int_0^{2\pi} \left(\dfrac{r^2}{2} \Bigg|_{r_9}^{R} \right) d\theta}$$

$$< v_z >= \frac{\frac{\pi\,(P_0 - P_L)\,R^4}{8\,\mu_0 L}(1 - \tfrac{4}{3}\lambda - 2\lambda^2 + 4\lambda^3 - \tfrac{5}{3}\lambda^4)}{\int_0^{2\pi}\left(\frac{R^2 - r_0^2}{2}\right)d\theta}$$

$$< v_z >= \frac{\frac{\pi\,(P_0 - P_L)\,R^4}{8\,\mu_0 L}(1 - \tfrac{4}{3}\lambda - 2\lambda^2 + 4\lambda^3 - \tfrac{5}{3}\lambda^4)}{\frac{R^2 - r_0^2}{2}\int_0^{2\pi} d\theta}$$

$$< v_z >= \frac{\frac{\pi\,(P_0 - P_L)\,R^4}{8\,\mu_0 L}(1 - \tfrac{4}{3}\lambda - 2\lambda^2 + 4\lambda^3 - \tfrac{5}{3}\lambda^4)}{\frac{R^2 - r_0^2}{2}(2\pi)}$$

$$< v_z >= \frac{\frac{\pi\,(P_0 - P_L)\,R^4}{8\,\mu_0 L}(1 - \tfrac{4}{3}\lambda - 2\lambda^2 + 4\lambda^3 - \tfrac{5}{3}\lambda^4)}{\pi\,(R^2 - r_0^2)}$$

$$< v_z >= \frac{\frac{(P_0 - P_L)\,R^4}{8\,\mu_0 L}(1 - \tfrac{4}{3}\lambda - 2\lambda^2 + 4\lambda^3 - \tfrac{5}{3}\lambda^4)}{R^2 - r_0^2}$$

$$< v_z >= \frac{\frac{(P_0 - P_L)\,R^4}{8\,\mu_0 L}(1 - \tfrac{4}{3}\lambda - 2\lambda^2 + 4\lambda^3 - \tfrac{5}{3}\lambda^4)}{R^2\left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right)}$$

$$< v_z >= \frac{\frac{(P_0 - P_L)\,R^2}{8\,\mu_0 L}(1 - \tfrac{4}{3}\lambda - 2\lambda^2 + 4\lambda^3 - \tfrac{5}{3}\lambda^4)}{1 - \left(\frac{r_0}{R}\right)^2}$$

$$< v_z >= \frac{\frac{(P_0 - P_L)\,R^2}{8\,\mu_0 L}(1 - \tfrac{4}{3}\lambda - 2\lambda^2 + 4\lambda^3 - \tfrac{5}{3}\lambda^4)}{1 - \lambda^2}$$

$$< v_z >= \frac{\frac{(P_0 - P_L)\,R^2}{8\,\mu_0 L}(1 - \tfrac{1}{3}\lambda - \tfrac{7}{3}\lambda^2 + \tfrac{5}{3}\lambda^3)}{1 + \lambda} \qquad (31)$$

$$<v_z>=\frac{\frac{(P_0-P_L)R^2}{8\mu_0 L}\left[1-\frac{4}{3}\left(\frac{r_0}{R}\right)-2\left(\frac{r_0}{R}\right)^2+4\left(\frac{r_0}{R}\right)^3-\frac{5}{3}\left(\frac{r_0}{R}\right)^4\right]}{1-\left(\frac{r_0}{R}\right)^2}$$

Fuerza ejercida por el fluido sobre el sólido exterior.

$F_z\,(r) = \tau_{rz}\,A$ (32)

Área de contacto.

$A\,(r) = 2\,\pi\,r\,L$ (33)

Al sustituir las ecuaciones (4) y (33) en la ecuación (32):

$$F_z(r)=\left[\left(\frac{P_0-P_L}{2L}\right)r\right](2\pi r L)$$

$$F_z(r)=\pi(P_0-P_L)r^2 \qquad (34)$$

Para la capa de fluido sobre la superficie de la tubería $r = R$. Al evaluar la ecuación (34) en $r = R$:

$F_z\,(r) = \pi\,(P_0 - P_L)\,r^2$ (35)

Cuando τ_0 se hace cero las ecuaciones de v_z y τ_{rz} se transforman en las correspondientes al flujo de un fluido newtoniano en tubos circulares.

Comprobación analítica.

$$r_0=\frac{2\tau_0 L}{P_0-P_L}$$

Si $\tau_0\to 0$, $r_0\to 0$, $\lambda\to 0$:

Caso límite v_z.

$$v_z>=\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu_0 L}\left[1-2\lambda+2\lambda\left(\frac{r}{R}\right)-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad r\geq r_0 \qquad (18a)$$

$$v_z>=\lim_{\lambda\to 0}\left\{\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu_0 L}\left[1-2\lambda+2\lambda\left(\frac{r}{R}\right)-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\right\}$$

$$<v_z> = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu_0 L}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

$$<v_z> = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu_0 L}(1-\lambda)^2 \qquad r < r_0 \qquad (18b)$$

$$<v_z> = \lim_{\lambda \to 0}\left\{\frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu_0 L}(1-\lambda)^2\right\}$$

$<v_z> = \dfrac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu_0 L}$ El “tapón” se mueve con la máxima velocidad.

Siendo $r_0 \to 0$ ($\lambda \to 0$), finalmente se tiene:

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu_0 L}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$