

**Ejemplo 8.3-1 del Bird. Segunda Edición. Página 284.**

**Flujo laminar en un tubo circular de un fluido incompresible que obedece a la ley de potencias.** Deducir la expresión para la velocidad de flujo másico de un líquido polimérico, descrito por el modelo de la ley de potencias. El fluido circula por un tubo circular largo de radio  $R$  y longitud  $L$ , como resultado de una diferencia de presión, de gravedad o de ambas cosas.

Solución.

El ejercicio propuesto difiere del ejercicio 1 sólo en el tipo de fluido.

Condiciones:

Estado estacionario.

Flujo laminar.

Propiedades del fluido constantes ( $\rho, \mu$ ).

Fluido regido por el modelo de la ley de potencias.

Efectos de borde despreciables.

Flujo longitudinal (en dirección  $z$ ):  $v_r = 0, v_\theta = 0, v_z \neq 0$ .

La velocidad varía en función de  $r$ :  $v_z = v_z(r)$ .

Balance de cantidad de movimiento.

$$2\pi r L \tau_{rz} \Big|_r - 2\pi r L \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} + 2\pi r \Delta r L \rho g_z + 2\pi r \Delta r (p_0 - p_L) = 0$$

$g_z$  es la componente gravitacional en la dirección del flujo. En este caso  $g_z = g$ .

$$2\pi r L \tau_{rz} \Big|_r - 2\pi r L \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} + 2\pi r \Delta r L \rho g + 2\pi r \Delta r (p_0 - p_L) = 0 \quad (1)$$

Al dividir entre  $2\pi L$ :

$$r \tau_{rz} \Big|_r - r \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} + r \Delta r \rho g_z + r \Delta r \frac{(p_0 - p_L)}{L} = 0$$

$$r \tau_{rz} \Big|_r - r \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} + \left( \rho g + \frac{p_0 - p_L}{L} \right) r \Delta r = 0$$

$$\text{Sea } \rho g + \frac{p_0 - p_L}{L} = \frac{P_0 - P_L}{L}$$

$$r \tau_{rz} \Big|_r - r \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} + \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) r \Delta r = 0$$

$$r \tau_{rz} \Big|_r - r \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} = - \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) r \Delta r$$

Al multiplicar por  $(-1)$  la ecuación anterior:

$$r \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} - r \tau_{rz} \Big|_r = \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) r \Delta r$$

$$\frac{r \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} - r \tau_{rz} \Big|_r}{\Delta r} = \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) r$$

Tomando el límite cuando  $\Delta r \rightarrow 0$  en la ecuación anterior:

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{r \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} - r \tau_{rz} \Big|_r}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) r$$

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{r \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} - r \tau_{rz} \Big|_r}{\Delta r} = \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) r$$

Aplicando la definición de derivada:

$$\frac{d}{dr} (r \tau_{rz}) = \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) r$$

Al separar variables en la ecuación anterior:

$$d(r \tau_{rz}) = \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) r dr$$

Integrando ambos miembros de la ecuación:

$$\int d(r \tau_{rz}) = \int \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) r dr$$

$$\int d(r \tau_{rz}) = \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) \int r dr$$

La integración conduce a:

$$r \tau_{rz} = \left( \frac{P_0 - P_L}{2L} \right) \left( \frac{r^2}{2} \right) + C_1$$

$$r \tau_{rz} = \left( \frac{P_0 - P_L}{2L} \right) r^2 + C_1$$

$$\tau_{rz} = \left( \frac{P_0 - P_L}{2L} \right) r + \frac{C_1}{r} \quad (2)$$

Condición de borde: Para  $r = 0$ ,  $\tau_{rz} \neq \infty$ .

$$C_1 = 0 \quad (3)$$

Al sustituir la ecuación (3) en la ecuación (2):

$$\tau_{rz} = \left( \frac{P_0 - P_L}{2L} \right) r \quad (4)$$

La ecuación (4) es la distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento.

Distribución de velocidad.

Fluido que obedece a la ley de potencias.

$$\tau_{rz} = -m \left| \frac{dv_z}{dr} \right|^{n-1} \frac{dv_z}{dr} \quad (5)$$

$\frac{dv_z}{dr} < 0$  para el flujo en un tubo.

$$\tau_{rz} = m \left| -\frac{dv_z}{dr} \right|^{n-1} \left( -\frac{dv_z}{dr} \right)$$

$$\tau_{rz} = m \left( -\frac{dv_z}{dr} \right)^n \quad (6)$$

Al sustituir la ecuación (6) en la ecuación (4):

$$m \left( -\frac{dv_z}{dr} \right)^n = \left( \frac{P_0 - P_L}{2L} \right) r$$

$$\left( -\frac{dv_z}{dr} \right)^n = \left( \frac{P_0 - P_L}{2mL} \right) r$$

$$-\frac{dv_z}{dr} = \left( \frac{P_0 - P_L}{2mL} \right)^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}}$$

Al separar las variables en la ecuación anterior:

$$dv_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}} dr$$

Al integrar ambos miembros de la ecuación:

$$\int dv_z = \int -\left(\frac{P_0 - P_L}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}} dr$$

$$v_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \int r^{\frac{1}{n}} dr$$

La integración conduce a:

$$v_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{r^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + C_2 \quad (7)$$

Condición de borde: Para  $r = R$ :  $v_z = 0$ .

Al sustituir en la ecuación (7):

$$0 = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{R^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + C_2$$

Al despejar  $C_2$  en la ecuación anterior:

$$C_2 = \left(\frac{P_0 - P_L}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{R^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} \quad (8)$$

Al sustituir la ecuación (8) en la ecuación (7):

$$v_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{r^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + \left(\frac{P_0 - P_L}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{R^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}$$

$$v_z = \left(\frac{P_0 - P_L}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\frac{1}{n}+1} (R^{\frac{1}{n}+1} - r^{\frac{1}{n}+1})$$

$$v_z = \left(\frac{P_0 - P_L}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{R^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} \left(1 - \frac{r^{\frac{1}{n}+1}}{R^{\frac{1}{n}+1}}\right)$$

$$v_z = \frac{1}{\frac{1}{n} + 1} \left[ \frac{(P_0 - P_L) R^{1+n}}{2mL} \right]^{\frac{1}{n}} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{n} + 1} \right] \quad (9)$$

Velocidad máxima.

La velocidad es máxima en  $r = 0$ .

$$v_{z,máx} = v_z(0)$$

Al sustituir  $r = 0$  en la ecuación (9):

$$v_{z,máx} = \frac{1}{\frac{1}{n} + 1} \left[ \frac{(P_0 - P_L) R^{n+1}}{2mL} \right]^{\frac{1}{n}} \left[ 1 - \left( \frac{0}{R} \right)^{\frac{1}{n} + 1} \right]$$

$$v_{z,máx} = \frac{1}{\frac{1}{n} + 1} \left[ \frac{(P_0 - P_L) R^{n+1}}{2mL} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (10)$$

Velocidad media.

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta} \quad (11)$$

Al sustituir la ecuación (9) en la ecuación (11):

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R \left\{ \frac{1}{\frac{1}{n} + 1} \left[ \frac{(P_0 - P_L) R^{n+1}}{2mL} \right]^{\frac{1}{n}} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{n} + 1} \right] \right\} r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\frac{1}{\frac{1}{n} + 1} \left[ \frac{(P_0 - P_L) R^{n+1}}{2mL} \right]^{\frac{1}{n}} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{n} + 1} \right] r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\frac{1}{\frac{1}{n} + 1} \left[ \frac{(P_0 - P_L) R^{n+1}}{2mL} \right]^{\frac{1}{n}} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( 1 - \frac{r^{\frac{1}{n} + 1}}{R^{\frac{1}{n} + 1}} \right) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\frac{1}{\frac{1}{n}+1} \left[ \frac{(P_0 - P_L) R^{n+1}}{2mL} \right]^{\frac{1}{n}} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( r - \frac{r^{\frac{1}{n}+2}}{R^{\frac{1}{n}+1}} \right) dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\frac{1}{\frac{1}{n}+1} \left[ \frac{(P_0 - P_L) R^{n+1}}{2mL} \right]^{\frac{1}{n}} \int_0^R \left( r - \frac{r^{\frac{1}{n}+2}}{R^{\frac{1}{n}+1}} \right) dr \int_0^{2\pi} d\theta}{\int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta}$$

Al simplificar  $\int_0^{2\pi} d\theta$ :

$$\langle v_z \rangle = \frac{\frac{1}{\frac{1}{n}+1} \left[ \frac{(P_0 - P_L) R^{n+1}}{2mL} \right]^{\frac{1}{n}} \int_0^R \left( r - \frac{r^{\frac{1}{n}+2}}{R^{\frac{1}{n}+1}} \right) dr}{\int_0^R r dr}$$

La integración conduce a:

$$\langle v_z \rangle = \frac{\frac{1}{\frac{1}{n}+1} \left[ \frac{(P_0 - P_L) R^{n+1}}{2mL} \right]^{\frac{1}{n}} \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^{\frac{1}{n}+3}}{(\frac{1}{n}+3)R^{\frac{1}{n}+1}} \right]_0^R}{\left( \frac{r^2}{2} \right)_0^R}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\frac{1}{\frac{1}{n}+1} \left[ \frac{(P_0 - P_L) R^{n+1}}{2mL} \right]^{\frac{1}{n}} \left[ \frac{R^2}{2} - \frac{R^{\frac{1}{n}+3}}{(\frac{1}{n}+3)R^{\frac{1}{n}+1}} \right]}{\left( \frac{R^2}{2} \right)}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\frac{1}{\frac{1}{n}+1} \left[ \frac{(P_0 - P_L) R^{n+1}}{2mL} \right]^{\frac{1}{n}} \left( \frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{\frac{1}{n}+3} \right)}{\left( \frac{R^2}{2} \right)}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\frac{1}{\frac{1}{n}+1} \left[ \frac{(P_0 - P_L) R^{n+1}}{2mL} \right]^{\frac{1}{n}} R^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{1}{n}+3} \right)}{\left( \frac{R^2}{2} \right)}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\frac{1}{\frac{1}{n}+1} \left[ \frac{(P_0 - P_L) R^{n+1}}{2mL} \right]^{\frac{1}{n}} R^2 \left[ \frac{\frac{1}{n}+1}{2(\frac{1}{n}+3)} \right]}{\left( \frac{R^2}{2} \right)}$$

$$\langle v_z \rangle = \left[ \frac{(P_0 - P_L) R^{n+1}}{2mL} \right]^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\frac{1}{n}+3}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{1}{\frac{1}{n}+3} \left[ \frac{(P_0 - P_L) R^{n+1}}{2mL} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (12)$$

Velocidad volumétrica de flujo (Caudal).

$$Q = \langle v_z \rangle A \quad (13)$$

Área perpendicular al flujo:

$$A = \pi R^2 \quad (14)$$

Al sustituir las ecuaciones (12) y (14) en la ecuación (13):

$$Q = \frac{1}{\frac{1}{n}+3} \left[ \frac{(P_0 - P_L) R^{n+1}}{2mL} \right]^{\frac{1}{n}} (\pi R^2)$$

$$Q = \frac{\pi}{\frac{1}{n}+3} \left[ \frac{(P_0 - P_L) R^{3n+1}}{2mL} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (15)$$

Flujo másico.

$$\rho = \frac{m}{Q}$$

$$\dot{m} = \rho Q$$

$$\dot{m} = \rho \left\{ \frac{\pi}{\frac{1}{n} + 3} \left[ \frac{(P_0 - P_L) R^{3n+1}}{2mL} \right]^{\frac{1}{n}} \right\}$$

$$\dot{m} = \frac{\pi \rho}{\frac{1}{n} + 3} \left[ \frac{(P_0 - P_L) R^{3n+1}}{2mL} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (16)$$

Componente de la fuerza  $F$  del fluido sobre la superficie.

$$F_z(r) = \tau_{rz} A \quad (17)$$

De la ecuación (4):

$$\tau_{rz} = \left( \frac{P_0 - P_L}{2L} \right) r \quad (4)$$

Área de contacto.

$$A(r) = 2\pi r L \quad (18)$$

Al sustituir las ecuaciones (4) y (18) en la ecuación (17):

$$F_z(r) = \left[ \left( \frac{P_0 - P_L}{2L} \right) r \right] (2\pi r L)$$

$$F_z(r) = \pi (P_0 - P_L) r^2 \quad (19)$$

Para la capa de fluido sobre la superficie de la tubería  $r = R$ . Al evaluar la ecuación (19) en  $r = R$ :

$$F_z(R) = \pi (P_0 - P_L) R^2 \quad (20)$$

Esta fuerza es equivalente a la diferencia de presión  $P_0 - P_L$  por el área de flujo  $\pi R^2$ .

Se sabe que  $\rho g + \frac{(p_0 - p_L)}{L} = \frac{P_0 - P_L}{L}$ , luego:

$$P_0 - P_L = p_0 - p_L + \rho g L \quad (21)$$

Al sustituir la ecuación (21) en la ecuación (20):

$$F_z(R) = \pi (p_0 - p_L + \rho g L) R^2$$

$$F_z(R) = \pi (p_0 - p_L) R^2 + \pi R^2 \rho g L \quad (22)$$



Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **Distribuciones de Velocidad en Flujo Laminar, Sistemas cilíndricos**, perteneciente a las asignaturas **Fenómenos de Transporte y Mecánica de Fluidos**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

<http://www.tutoruniversitario.com/>

Si Usted requiere la resolución de ejercicios adicionales acerca de ésta u otras asignaturas, contáctenos a través de los siguientes medios:

- WhatsApp: +58-4249744352 (En forma directa o desde nuestra página web).

- E-mail: [medinawj@gmail.com](mailto:medinawj@gmail.com)

Lista de asignaturas en las cuales podemos ayudarle:

Cálculo Diferencial.	Cálculo Integral.	Cálculo Vectorial.
Ecuaciones Diferenciales.	Trigonometría.	Matemáticas Aplicadas.
Matemáticas Financieras.	Álgebra Lineal.	Métodos Numéricos.
Estadística.	Física (Mecánica).	Física (Electricidad).
Mecánica Vectorial (Estática).	Química Inorgánica.	Fisicoquímica.
Termodinámica.	Termodinámica Química.	Mecánica de Fluidos.
Fenómenos de Transporte.	Transferencia de Calor.	Ingeniería Económica.