Ejemplo 8.3-1 del Bird. Segunda Edición. Página 284.

Flujo laminar en un tubo circular de un fluido incompresible que obedece a la ley de potencias. Deducir la expresión para la velocidad de flujo másico de un líquido polimérico, descrito por el modelo de la ley de potencias. El fluido circula por un tubo circular largo de radio R y longitud L, como resultado de una diferencia de presión, de gravedad o de ambas cosas.

Solución.

El ejercicio propuesto difiere del ejercicio 1 sólo en el tipo de fluido.

Condiciones:

Estado estacionario.

Flujo laminar.

Propiedades del fluido constantes (ρ, μ).

Fluido regido por el modelo de la ley de potencias.

Efectos de borde despreciables.

Flujo longitudinal (en dirección z): $v_r = 0$, $v_\theta = 0$, $v_z \neq 0$.

La velocidad varía en función de r: $v_z = v_z(r)$.

Balance de cantidad de movimiento.

$$2\pi r L \tau_{rz}\big|_{r} - 2\pi r L \tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} + 2\pi r \Delta r L \rho g_z + 2\pi r \Delta r (p_0 - p_L) = 0$$

g_z es la componente gravitacional en la dirección del flujo. En este caso $g_z = g$.

$$2\pi r L \tau_{rz}\big|_{r} - 2\pi r L \tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} + 2\pi r \Delta r L \rho g + 2\pi r \Delta r (p_0 - p_L) = 0 \qquad (1)$$

Al dividir entre $2\pi L$:

$$r \tau_{rz}\big|_{r} - r \tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} + r \Delta r \rho g_z + r \Delta r \frac{(p_0 - p_L)}{L} = 0$$

$$r \tau_{rz}\big|_{r} - r \tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} + \left(\rho g + \frac{p_0 - p_L}{L}\right) r \Delta r = 0$$

Sea $\rho g + \dfrac{p_0 - p_L}{L} = \dfrac{P_0 - P_L}{L}$

$$r\,\tau_{rz}\big|_{r}-r\,\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r}+\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)r\,\Delta r=0$$

$$r\,\tau_{rz}\big|_{r}-r\,\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r}=-\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)r\,\Delta r$$

Al multiplicar por (– 1) la ecuación anterior:

$$r\,\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r}-r\,\tau_{rz}\big|_{r}=\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)r\,\Delta r$$

$$\frac{r\,\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r}-r\,\tau_{rz}\big|_{r}}{\Delta r}=\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)r$$

Tomando el límite cuando $\Delta r \to 0$ en la ecuación anterior:

$$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{r\,\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r}-r\,\tau_{rz}\big|_{r}}{\Delta r}=\lim_{\Delta r\to 0}\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)r$$

$$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{r\,\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r}-r\,\tau_{rz}\big|_{r}}{\Delta r}=\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)r$$

Aplicando la definición de derivada:

$$\frac{d}{d\,r}(r\,\tau_{rz})=\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)r$$

Al separar variables en la ecuación anterior:

$$d\,(r\,\tau_{rz})=\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)r\,d\,r$$

Integrando ambos miembros de la ecuación:

$$\int d\,(r\,\tau_{rz})=\int\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)r\,d\,r$$

$$\int d\,(r\,\tau_{rz})=\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)\int r\,d\,r$$

La integración conduce a:

$$r\,\tau_{rz}=\left(\frac{P_0-P_L}{2\,L}\right)\left(\frac{r^2}{2}\right)+C_1$$

$$r\,\tau_{rz}=\left(\frac{P_0-P_L}{2L}\right)r^2+C_1$$

$$\tau_{rz}=\left(\frac{P_0-P_L}{2L}\right)r+\frac{C_1}{r} \qquad (2)$$

Condición de borde: Para $r = 0$, $\tau_{rz} \neq \infty$.

$C_1 = 0$ (3)

Al sustituir la ecuación (3) en la ecuación (2):

$$\tau_{rz}=\left(\frac{P_0-P_L}{2L}\right)r \qquad (4)$$

La ecuación (4) es la distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento.

Distribución de velocidad.

Fluido que obedece a la ley de potencias.

$$\tau_{rz}=-m\left|\frac{d\,v_z}{d\,r}\right|^{n-1}\frac{d\,v_z}{d\,r} \qquad (5)$$

$\dfrac{dv_z}{dr}<0$ para el flujo en un tubo.

$$\tau_{rz}=m\left|-\frac{d\,v_z}{d\,r}\right|^{n-1}\left(-\frac{d\,v_z}{d\,r}\right)$$

$$\tau_{rz}=m\left(-\frac{dv_z}{dr}\right)^n \qquad (6)$$

Al sustituir la ecuación (6) en la ecuación (4):

$$m\left(-\frac{dv_z}{dr}\right)^n=\left(\frac{P_0-P_L}{2L}\right)r$$

$$\left(-\frac{dv_z}{dr}\right)^n=\left(\frac{P_0-P_L}{2mL}\right)r$$

$$-\frac{dv_z}{dr}=\left(\frac{P_0-P_L}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}}r^{\frac{1}{n}}$$

Al separar las variables en la ecuación anterior:

$$d\,v_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2\,m\,L}\right)^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}}\,d\,r$$

Al integrar ambos miembros de la ecuación:

$$\int d\,v_z = \int -\left(\frac{P_0 - P_L}{2\,m\,L}\right)^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}}\,d\,r$$

$$v_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2\,m\,L}\right)^{\frac{1}{n}} \int r^{\frac{1}{n}}\,d\,r$$

La integración conduce a:

$$v_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2\,m\,L}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{r^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + C_2 \qquad (7)$$

Condición de borde: Para $r = R$: $v_z = 0$.

Al sustituir en la ecuación (7):

$$0 = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2\,m\,L}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{R^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + C_2$$

Al despejar C_2 en la ecuación anterior:

$$C_2 = \left(\frac{P_0 - P_L}{2\,m\,L}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{R^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} \qquad (8)$$

Al sustituir la ecuación (8) en la ecuación (7):

$$v_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2\,m\,L}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{r^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + \left(\frac{P_0 - P_L}{2\,m\,L}\right)^{1/n} \frac{R^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}$$

$$v_z = \left(\frac{P_0 - P_L}{2\,m\,L}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left(R^{\frac{1}{n}+1} - r^{\frac{1}{n}+1}\right)$$

$$v_z = \left(\frac{P_0 - P_L}{2\,m\,L}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{R^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}\left(1 - \frac{r^{\frac{1}{n}+1}}{R^{\frac{1}{n}+1}}\right)$$

$$v_z=\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left[\frac{(P_0-P_L)R^{1+n}}{2mL}\right]^{\frac{1}{n}}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}+1}\right] \tag{9}$$

Velocidad máxima.

La velocidad es máxima en $r = 0$.

$$v_{z,máx}=v_z(0)$$

Al sustituir $r = 0$en la ecuación (9):

$$v_{z,máx}=\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left[\frac{(P_0-P_L)R^{n+1}}{2mL}\right]^{\frac{1}{n}}\left[1-\left(\frac{0}{R}\right)^{\frac{1}{n}+1}\right]$$

$$v_{z,máx}=\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left[\frac{(P_0-P_L)R^{n+1}}{2mL}\right]^{\frac{1}{n}} \tag{10}$$

Velocidad media.

$$<v_z>=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R v_z\,r\,dr\,d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\theta} \tag{11}$$

Al sustituir la ecuación (9) en la ecuación (11):

$$<v_z>=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R\left\{\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left[\frac{(P_0-P_L)R^{n+1}}{2mL}\right]^{\frac{1}{n}}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}+1}\right]\right\}r\,dr\,d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\theta}$$

$$<v_z>=\frac{\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left[\frac{(P_0-P_L)R^{n+1}}{2mL}\right]^{\frac{1}{n}}\int_0^{2\pi}\int_0^R\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}+1}\right]r\,dr\,d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\theta}$$

$$<v_z>=\frac{\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left[\frac{(P_0-P_L)R^{n+1}}{2mL}\right]^{\frac{1}{n}}\int_0^{2\pi}\int_0^R\left(1-\frac{r^{\frac{1}{n}+1}}{R^{\frac{1}{n}+1}}\right)r\,dr\,d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\theta}$$

$$<v_z>=\frac{\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left[\frac{(P_0-P_L)R^{n+1}}{2mL}\right]^{\frac{1}{n}}\int_0^{2\pi}\int_0^R\left(r-\frac{r^{\frac{1}{n}+2}}{R^{\frac{1}{n}+1}}\right)dr\,d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\theta}$$

$$<v_z>=\frac{\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left[\frac{(P_0-P_L)R^{n+1}}{2mL}\right]^{\frac{1}{n}}\int_0^R\left(r-\frac{r^{\frac{1}{n}+2}}{R^{\frac{1}{n}+1}}\right)dr\int_0^{2\pi}d\theta}{\int_0^R r\,dr\int_0^{2\pi}d\theta}$$

Al simplificar $\int_0^{2\pi}d\theta$:

$$<v_z>=\frac{\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left[\frac{(P_0-P_L)R^{n+1}}{2mL}\right]^{\frac{1}{n}}\int_0^R\left(r-\frac{r^{\frac{1}{n}+2}}{R^{\frac{1}{n}+1}}\right)dr}{\int_0^R r\,dr}$$

La integración conduce a:

$$<v_z>=\frac{\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left[\frac{(P_0-P_L)R^{n+1}}{2mL}\right]^{\frac{1}{n}}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^{\frac{1}{n}+3}}{(\frac{1}{n}+3)R^{\frac{1}{n}+1}}\Bigg|_0^R\right]}{\left(\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^R\right)}$$

$$<v_z>=\frac{\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left[\frac{(P_0-P_L)R^{n+1}}{2mL}\right]^{\frac{1}{n}}\left[\frac{R^2}{2}-\frac{R^{\frac{1}{n}+3}}{(\frac{1}{n}+3)R^{\frac{1}{n}+1}}\right]}{\left(\frac{R^2}{2}\right)}$$

$$<v_z>=\frac{\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left[\frac{(P_0-P_L)R^{n+1}}{2mL}\right]^{\frac{1}{n}}\left(\frac{R^2}{2}-\frac{R^2}{\frac{1}{n}+3}\right)}{\left(\frac{R^2}{2}\right)}$$

$$< v_z >= \frac{\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left[\frac{(P_0 - P_L)R^{n+1}}{2mL}\right]^{\frac{1}{n}} R^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\frac{1}{n}+3}\right)}{\left(\frac{R^2}{2}\right)}$$

$$< v_z >= \frac{\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left[\frac{(P_0 - P_L)R^{n+1}}{2mL}\right]^{\frac{1}{n}} R^2\left[\frac{\frac{1}{n}+1}{2(\frac{1}{n}+3)}\right]}{\left(\frac{R^2}{2}\right)}$$

$$< v_z >= \left[\frac{(P_0 - P_L)R^{n+1}}{2mL}\right]^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\frac{1}{n}+3}$$

$$< v_z >= \frac{1}{\frac{1}{n}+3}\left[\frac{(P_0 - P_L)R^{n+1}}{2mL}\right]^{\frac{1}{n}} \qquad (12)$$

Velocidad volumétrica de flujo (Caudal).

$$Q = < v_z > A \qquad (13)$$

Área perpendicular al flujo:

$$A = \pi R^2 \qquad (14)$$

Al sustituir las ecuaciones (12) y (14) en la ecuación (13):

$$Q = \frac{1}{\frac{1}{n}+3}\left[\frac{(P_0 - P_L)R^{n+1}}{2mL}\right]^{\frac{1}{n}} (\pi R^2)$$

$$Q = \frac{\pi}{\frac{1}{n}+3}\left[\frac{(P_0 - P_L)R^{3n+1}}{2mL}\right]^{\frac{1}{n}} \qquad (15)$$

Flujo másico.

$$\rho = \frac{\dot{m}}{Q}$$

$$\dot{m} = \rho Q$$

$$\dot{m} = \rho \left\{ \frac{\pi}{\frac{1}{n}+3} \left[\frac{(P_0 - P_L)\, R^{3n+1}}{2\, m\, L} \right]^{\frac{1}{n}} \right\}$$

$$\dot{m} = \frac{\pi\, \rho}{\frac{1}{n}+3} \left[\frac{(P_0 - P_L)\, R^{3n+1}}{2\, m\, L} \right]^{\frac{1}{n}} \qquad (16)$$

Componente de la fuerza F del fluido sobre la superficie.

$$F_z\,(r) = \tau_{rz}\, A \qquad (17)$$

De la ecuación (4):

$$\tau_{r\,z} = \left(\frac{P_0 - P_L}{2\, L} \right) r \qquad (4)$$

Área de contacto.

$$A\,(r) = 2\, \pi\, r\, L \qquad (18)$$

Al sustituir las ecuaciones (4) y (18) en la ecuación (17):

$$F_z\,(r) = \left[\left(\frac{P_0 - P_L}{2\, L} \right) r \right] (2\, \pi\, r\, L)$$

$$F_z\,(r) = \pi\, (P_0 - P_L)\, r^2 \qquad (19)$$

Para la capa de fluido sobre la superficie de la tubería $r = R$. Al evaluar la ecuación (19) en $r = R$:

$$F_z\,(R) = \pi\, (P_0 - P_L)\, R^2 \qquad (20)$$

Esta fuerza es equivalente a la diferencia de presión $P_0 - P_L$ por el área de flujo $\pi\, R^2$.

Se sabe que $\rho\, g + \frac{(p_0 - p_L)}{L} = \frac{P_0 - P_L}{L}$, luego:

$$P_0 - P_L = p_0 - p_L + \rho\, g\, L \qquad (21)$$

Al sustituir la ecuación (21) en la ecuación (20):

$$F_z\,(R) = \pi\, (p_0 - p_L + \rho\, g\, L)\, R^2$$

$$F_z\,(R) = \pi\, (p_0 - p_L)\, R^2 + \pi\, R^2\, \rho\, g\, L \qquad (22)$$