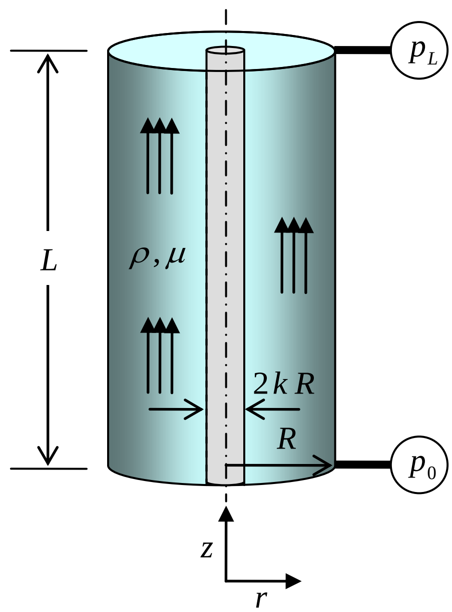
Sección 2.4 del Bird. Página 2.18.

Flujo a través de una sección de corona circular. Un fluido incompresible fluye en estado estacionario a través de la región comprendida entre dos cilindros circulares coaxiales de radios $k\,R$ y R.



Determinar.

a) Distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento.

b) Distribución de velocidad.

c) Velocidad máxima.

d) Velocidad media.

e) Velocidad volumétrica de flujo.

f) Componente de la fuerza F del fluido sobre el sólido interior.

g) Componente de la fuerza F del fluido sobre el sólido exterior.

Solución.

El ejercicio propuesto difiere del ejercicio 1 sólo en las condiciones de borde:

Para $r = k\,R$: $v_z = 0$ y para $r = R$: $v_z = 0$.

Condiciones:

Estado estacionario.

Flujo laminar.

Propiedades del fluido constantes (ρ, μ).

Fluido Newtoniano.

Efectos de borde despreciables.

Flujo longitudinal (en dirección z): $v_r = 0$, $v_\theta = 0$, $v_z \neq 0$.

La velocidad varía en función de r: $v_z = v_z(r)$.

Balance de cantidad de movimiento.

$$2\pi r L \tau_{rz}\big|_r - 2\pi r L \tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} + 2\pi r \Delta r L \rho g_z + 2\pi r \Delta r (p_0 - p_L) = 0$$

g_z es la componente gravitacional en la dirección del flujo. En este caso $g_z = g$.

$$2\pi r L \tau_{rz}\big|_r - 2\pi r L \tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} + 2\pi r \Delta r L \rho g + 2\pi r \Delta r (p_0 - p_L) = 0 \qquad (1)$$

Al dividir entre $2\pi L$:

$$r\tau_{rz}\big|_r - r\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} + r\Delta r \rho g_z + r\Delta r \frac{(p_0 - p_L)}{L} = 0$$

$$r\tau_{rz}\big|_r - r\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} + \left(\rho g + \frac{p_0 - p_L}{L}\right) r\Delta r = 0$$

Sea $\rho g + \frac{p_0 - p_L}{L} = \frac{P_0 - P_L}{L}$

$$r\tau_{rz}\big|_r - r\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} + \left(\frac{P_0 - P_L}{L}\right) r\Delta r = 0$$

$$r\tau_{rz}\big|_r - r\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} = -\left(\frac{P_0 - P_L}{L}\right) r\Delta r$$

Al multiplicar por (– 1) la ecuación anterior:

$$r\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} - r\tau_{rz}\big|_r = \left(\frac{P_0 - P_L}{L}\right) r\Delta r$$

$$\frac{r\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} - r\tau_{rz}\big|_r}{\Delta r} = \left(\frac{P_0 - P_L}{L}\right) r$$

Tomando el límite cuando $\Delta r \to 0$ en la ecuación anterior:

$$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{r\,\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r}-r\,\tau_{rz}\big|_{r}}{\Delta r}=\lim_{\Delta r\to 0}\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)r$$

$$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{r\,\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r}-r\,\tau_{rz}\big|_{r}}{\Delta r}=\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)r$$

Aplicando la definición de derivada:

$$\frac{d}{d\,r}(r\,\tau_{rz})=\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)r$$

Al separar variables en la ecuación anterior:

$$d\,(r\,\tau_{rz})=\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)r\,d\,r$$

Integrando ambos miembros de la ecuación:

$$\int d\,(r\,\tau_{rz})=\int\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)r\,d\,r$$

$$\int d\,(r\,\tau_{rz})=\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)\int r\,d\,r$$

La integración conduce a:

$$r\,\tau_{rz}=\left(\frac{P_0-P_L}{2L}\right)\left(\frac{r^2}{2}\right)+C_1$$

$$r\,\tau_{rz}=\left(\frac{P_0-P_L}{2L}\right)r^2+C_1$$

$$\tau_{rz}=\left(\frac{P_0-P_L}{2L}\right)r+\frac{C_1}{r} \qquad (2)$$

La constante C_1 no puede determinarse de forma inmediata, puesto que no disponemos de información acerca de la densidad de flujo de cantidad de movimiento en ninguna de las dos superficies $x=k\,R$ ó $x=R$.

Fluido Newtoniano:

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr} \tag{3}$$

Al sustituir la ecuación (3) en la ecuación (2)

$$-\mu \frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{P_0 - P_L}{2L}\right) r + \frac{C_1}{r}$$

Al separar las variables en la ecuación anterior:

$$dv_z = \left[-\left(\frac{P_0 - P_L}{2\mu L}\right) r - \frac{C_1}{\mu r}\right] dr$$

Al integrar ambos miembros de la ecuación:

$$\int dv_z = \int \left[-\left(\frac{P_0 - P_L}{2\mu L}\right) r - \frac{C_1}{\mu r}\right] dr$$

$$v_z = \int -\left(\frac{P_0 - P_L}{2\mu L}\right) r\,dr - \int \frac{C_1}{\mu} \frac{dr}{r}$$

$$v_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2\mu L}\right) \int r\,dr - \frac{C_1}{\mu} \int \frac{dr}{r}$$

La integración conduce a:

$$v_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2\mu L}\right)\left(\frac{r^2}{2}\right) - \frac{C_1}{\mu} \ln r + C_2$$

$$v_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right) r^2 - \frac{C_1}{\mu} \ln r + C_2 \tag{4}$$

Condición de borde: Para $r = k\,R$: $v_z = 0$.

Al sustituir en la ecuación (4):

$$0 = -\left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)(k\,R)^2 - \frac{C_1}{\mu} \ln(k\,R) + C_2$$

$$0 = -\left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right) k^2 R^2 - \frac{C_1}{\mu} \ln(k\,R) + C_2 \tag{5}$$

Condición de borde: Para $r = R$: $v_z = 0$.

Al sustituir en la ecuación (4):

$$0=-\left(\frac{P_0-P_L}{4\mu L}\right)(R)^2-\frac{C_1}{\mu}\ln(R)+C_2$$

$$0=-\left(\frac{P_0-P_L}{4\mu L}\right)R^2-\frac{C_1}{\mu}\ln R+C_2 \qquad (6)$$

Al restar las ecuaciones (5) y (6):

$$\left[-\left(\frac{P_0-P_L}{4\mu L}\right)k^2R^2-\frac{C_1}{\mu}\ln(kR)+C_2\right]-\left[-\left(\frac{P_0-P_L}{4\mu L}\right)R^2-\frac{C_1}{\mu}\ln R+C_2\right]=0$$

$$-\left(\frac{P_0-P_L}{4\mu L}\right)k^2R^2-\frac{C_1}{\mu}\ln(kR)+C_2+\left(\frac{P_0-P_L}{4\mu L}\right)R^2+\frac{C_1}{\mu}\ln R-C_2=0$$

$$-\left(\frac{P_0-P_L}{4\mu L}\right)k^2R^2-\frac{C_1}{\mu}\ln(kR)+\left(\frac{P_0-P_L}{4\mu L}\right)R^2+\frac{C_1}{\mu}\ln R=0$$

$$\left(\frac{P_0-P_L}{4\mu L}\right)R^2(1-k^2)+\frac{C_1}{\mu}[\ln R-\ln(kR)]=0$$

Por propiedades de los logaritmos: $\ln(kR)=\ln k+\ln R$

$$\left(\frac{P_0-P_L}{4\mu L}\right)R^2(1-k^2)+\frac{C_1}{\mu}(\ln R-\ln k-\ln R)=0$$

$$\left(\frac{P_0-P_L}{4\mu L}\right)R^2(1-k^2)+\frac{C_1}{\mu}(-\ln k)=0$$

$$\left(\frac{P_0-P_L}{4\mu L}\right)R^2(1-k^2)+\frac{C_1}{\mu}\ln(1/k)=0$$

Al simplificar μ:

$$\left(\frac{P_0-P_L}{4L}\right)R^2(1-k^2)+C_1\ln(1/k)=0$$

Al despejar C_1 de la ecuación anterior:

$$C_1=-\frac{(P_0-P_L)R^2}{4L}\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \qquad (7)$$

Al sustituir C_1 en la ecuación (4) y despejar C_2:

$$0=-\left(\frac{P_0-P_L}{4\mu L}\right)R^2-\frac{\left[-\frac{(P_0-P_L)R^2}{4L}\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\right]}{\mu}\ln R+C_2$$

$$0=-\left(\frac{P_0-P_L}{4\mu L}\right)R^2+\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\ln R+C_2$$

$$C_2=\left(\frac{P_0-P_L}{4\mu L}\right)R^2-\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\ln R \qquad (8)$$

Al sustituir las ecuaciones (7) y (8) en la ecuación (4), la distribución de velocidad se expresa de la siguiente manera:

$$v_z=-\left(\frac{P_0-P_L}{4\mu L}\right)r^2-\frac{\left[-\frac{(P_0-P_L)R^2}{4L}\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\right]}{\mu}\ln r+\left(\frac{P_0-P_L}{4\mu L}\right)R^2-\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\ln R$$

$$v_z=-\left(\frac{P_0-P_L}{4\mu L}\right)r^2+\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\ln r+\left(\frac{P_0-P_L}{4\mu L}\right)R^2-\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\ln R$$

$$v_z=\left(\frac{P_0-P_L}{4\mu L}\right)(R^2-r^2)+\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}(\ln r-\ln R)$$

$$v_z=\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)+\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

$$v_z=\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]+\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

$$v_z=\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2+\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\ln\left(\frac{r}{R}\right)\right] \qquad (9)$$

Distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento.

Al sustituir la ecuación (7) en la ecuación (2):

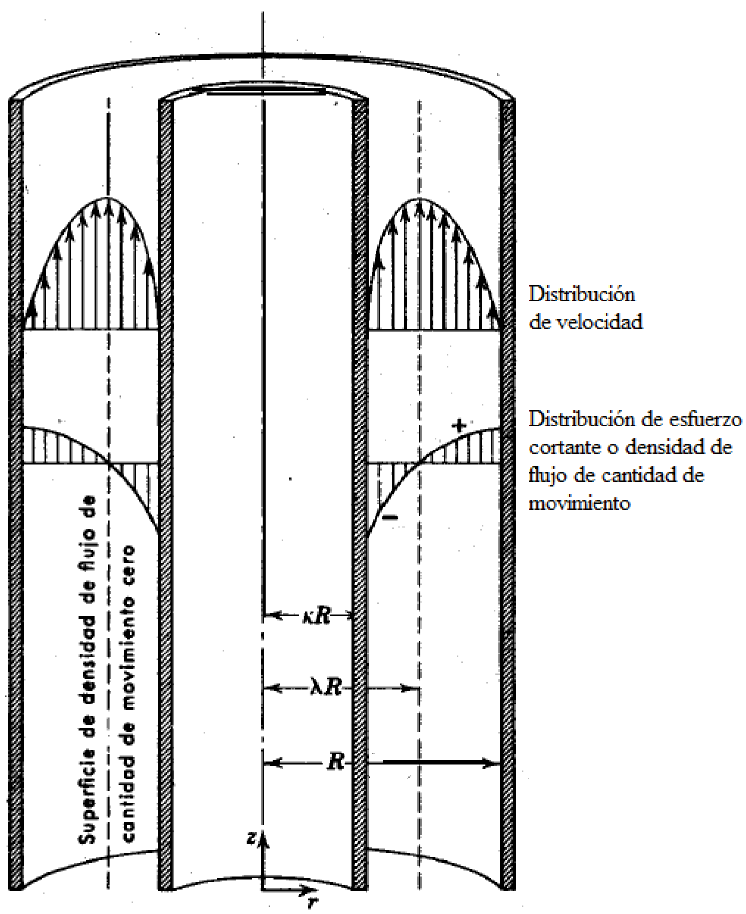
$$\tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{2L}\right) r + \frac{\left[-\frac{(P_0 - P_L)\,R^2}{4L}\,\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\right]}{r}$$

$$\tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{2L}\right) r - \frac{(P_0 - P_L)\,R^2}{4L}\,\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\,\frac{1}{r}$$

$$\tau_{rz} = \frac{(P_0 - P_L)\,R}{2L}\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{(P_0 - P_L)\,R}{4L}\,\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\left(\frac{R}{r}\right)$$

$$\tau_{rz} = \frac{(P_0 - P_L)\,R}{2L}\left[\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}\left(\frac{R}{r}\right)\right] \qquad (10)$$

En la figura siguiente se muestra la distribución de velocidad y la distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento.



Velocidad máxima.

La velocidad es máxima cuando $\tau_{rz} = 0$. De la ecuación (10):

$$\frac{(P_0 - P_L)R}{2L}\left[\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}\left(\frac{R}{r}\right)\right] = 0$$

$$\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}\left(\frac{R}{r}\right) = 0$$

$$\frac{r}{R} - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}\left(\frac{R}{r}\right) = 0$$

$$\frac{r}{R} = \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}\left(\frac{R}{r}\right)$$

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{1-k^2}{2\ln(1/k)}$$

$$r^2 = \frac{1-k^2}{2\ln(1/k)}R^2$$

$$r = \sqrt{\frac{1-k^2}{2\ln(1/k)}}\,R \qquad (11)$$

Al sustituir la ecuación (11) en la ecuación (9)

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\ln\left(\frac{r}{R}\right)\right]$$

$$v_{z,\max} = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L}\left\{1 - \left[\sqrt{\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}}\right]^2 + \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\ln\left[\sqrt{\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}}\right]\right\}$$

$$v_{z,\max} = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L}\left[1 - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} + \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}\ln\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}\right]$$

$$v_{z,\max} = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L}\left\{1 - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}\left[1 - \ln\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}\right]\right\} \qquad (12)$$

Velocidad media.

$$< v_z >= \frac{\int_0^{2\pi}\int_{kR}^{R} v_z\, r\, d r\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_{kR}^{R} r\, d r\, d\theta} \tag{13}$$

Al sustituir la ecuación (9) en la ecuación (13):

$$< v_z >= \frac{\int_0^{2\pi}\int_{kR}^{R}\left\{\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2+\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\ln\left(\frac{r}{R}\right)\right]\right\} r\, d r\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_{kR}^{R} r\, d r\, d\theta}$$

$$< v_z >= \frac{\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\int_0^{2\pi}\int_{kR}^{R}\left[1-\frac{r^2}{R^2}+\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}(\ln r-\ln R)\right] r\, d r\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_{kR}^{R} r\, d r\, d\theta}$$

$$< v_z >= \frac{\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\int_0^{2\pi}\left\{\int_{kR}^{R}\left[1-\frac{r^2}{R^2}+\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}(\ln r-\ln R)\right] r\, d r\right\} d\theta}{\int_0^{2\pi}\left[\int_{kR}^{R} r\, d r\right] d\theta}$$

$$< v_z >= \frac{\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\int_{kR}^{R}\left[1-\frac{r^2}{R^2}+\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}(\ln r-\ln R)\right] r\, d r\int_0^{2\pi} d\theta}{\int_{kR}^{R} r\, d r\int_0^{2\pi} d\theta}$$

Al simplificar $\int_0^{2\pi} d\theta$:

$$< v_z >= \frac{\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\int_{kR}^{R}\left[1-\frac{r^2}{R^2}+\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}(\ln r-\ln R)\right] r\, d r}{\int_{kR}^{R} r\, d r}$$

$$< v_z >= \frac{\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\int_{kR}^{R}\left\{\left[1-\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\ln R\right]-\frac{r^2}{R^2}+\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\ln r\right\} r\, d r}{\int_{kR}^{R} r\, d r}$$

$$< v_z >= \frac{\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\left\{\left[1-\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\ln R\right]\int_{kR}^{R} r\,dr-\frac{1}{R^2}\int_{kR}^{R} r^3 dr+\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\int_{kR}^{R} r\ln r\,dr\right\}}{\int_{kR}^{R} r\,dr}$$

La integración conduce a:

$$< v_z >= \frac{\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\left\{\left[1-\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\ln R\right]\left(\frac{r^2}{2}\Big|_{kR}^{R}\right)-\frac{1}{R^2}\left(\frac{r^4}{4}\Big|_{kR}^{R}\right)+\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\left(\frac{r^2\ln r}{2}-\frac{r^2}{4}\Big|_{kR}^{R}\right)\right\}}{\left(\frac{r^2}{2}\Big|_{kR}^{R}\right)}$$

$$< v_z >= \frac{\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\left\{\begin{array}{l}\left[1-\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\ln R\right]\left(\frac{R^2-k^2R^2}{2}\right)-\frac{1}{R^2}\left(\frac{R^4-k^4R^4}{4}\right)+\\ \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\left(\frac{R^2\ln R-k^2R^2\ln(kR)}{2}-\frac{R^2-k^2R^2}{4}\right)\end{array}\right\}}{\frac{R^2(1-k^2)}{2}}$$

$$< v_z >= \frac{\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\left[\begin{array}{l}\frac{R^2-k^2R^2}{2}-\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\left(\frac{R^2-k^2R^2}{2}\right)\ln R-\frac{1}{R^2}\left(\frac{R^4-k^4R^4}{4}\right)+\\ \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}R^2\ln R-\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}k^2R^2\ln(kR)-\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\frac{(R^2-k^2R^2)}{4}\end{array}\right]}{\frac{R^2(1-k^2)}{2}}$$

$$< v_z >= \frac{\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\left[\begin{array}{l}\frac{R^2}{2}-\frac{k^2R^2}{2}-\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}R^2\ln R+\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}k^2R^2\ln R-\frac{R^2}{4}+\frac{k^4R^2}{4}+\\ \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}R^2\ln R-\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}k^2R^2\ln(kR)-\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)}\frac{R^2(1-k^2)}{4}\end{array}\right]}{\frac{R^2(1-k^2)}{2}}$$

Al asociar términos semejantes:

$$<v_z>=\frac{\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\left[\begin{array}{l}\frac{R^2}{4}-\frac{k^2R^2}{2}+\frac{k^4R^2}{4}+\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}k^2R^2\ln R-\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}k^2R^2\ln(kR)\\-\frac{R^2(1-k^2)^2}{4\ln(1/k)}\end{array}\right]}{\frac{R^2(1-k^2)}{2}}$$

$$<v_z>=\frac{\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\left[\frac{R^2}{4}-\frac{k^2R^2}{2}+\frac{k^4R^2}{4}+\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}k^2R^2[\ln R-\ln(kR)]-\frac{R^2(1-k^2)^2}{4\ln(1/k)}\right]}{\frac{R^2(1-k^2)}{2}}$$

$$<v_z>=\frac{\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\left[\frac{R^2}{4}-\frac{k^2R^2}{2}+\frac{k^4R^2}{4}+\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}k^2R^2\ln(R/kR)-\frac{R^2(1-k^2)^2}{4\ln(1/k)}\right]}{\frac{R^2(1-k^2)}{2}}$$

$$<v_z>=\frac{\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\left[\frac{R^2}{4}-\frac{k^2R^2}{2}+\frac{k^4R^2}{4}+\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}k^2R^2\ln(1/k)-\frac{R^2(1-k^2)^2}{4\ln(1/k)}\right]}{\frac{R^2(1-k^2)}{2}}$$

$$<v_z>=\frac{\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\left[\frac{R^2}{4}-\frac{k^2R^2}{2}+\frac{k^4R^2}{4}+\frac{(1-k^2)}{2}k^2R^2-\frac{R^2(1-k^2)^2}{4\ln(1/k)}\right]}{\frac{R^2(1-k^2)}{2}}$$

$$<v_z>=\frac{\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\left[\frac{R^2}{4}-\frac{k^2R^2}{2}+\frac{k^4R^2}{4}+\frac{k^2R^2}{2}-\frac{k^4R^2}{2}-\frac{R^2(1-k^2)^2}{4\ln(1/k)}\right]}{\frac{R^2(1-k^2)}{2}}$$

$$<v_z>=\frac{\frac{(P_0-P_L)R^2}{4\mu L}\left[\frac{R^2}{4}-\frac{k^4R^2}{4}-\frac{R^2(1-k^2)^2}{4\ln(1/k)}\right]}{\frac{R^2(1-k^2)}{2}}$$

$$< v_z >= \frac{\frac{(P_0 - P_L) R^4}{16 \mu L} \left[1 - k^4 - \frac{(1-k^2)^2}{\ln(1/k)} \right]}{\frac{R^2 (1-k^2)}{2}}$$

$$< v_z >= \frac{\frac{(P_0 - P_L) R^2}{8 \mu L} \left[1 - k^4 - \frac{(1-k^2)^2}{\ln(1/k)} \right]}{1-k^2}$$

$$< v_z >= \frac{(P_0 - P_L) R^2}{8 \mu L} \left[\frac{1-k^4}{1-k^2} - \frac{1-k^2}{\ln(1/k)} \right] \quad (14)$$

Caudal entre los dos cilindros.

$$Q = < v_z > A \quad (15)$$

Área perpendicular al flujo:

$$A = \pi R^2 - \pi (k R)^2$$

$$A = \pi R^2 (1 - k^2) \quad (16)$$

Al sustituir las ecuaciones (14) y (16) en la ecuación (15):

$$Q = \left\{ \frac{(P_0 - P_L) R^2}{8 \mu L} \left[\frac{1-k^4}{1-k^2} - \frac{1-k^2}{\ln(1/k)} \right] \right\} [\pi R^2 (1-k)^2]$$

$$Q = \frac{\pi (P_0 - P_L) R^4}{8 \mu L} \left[(1-k^4) - \frac{(1-k^2)^2}{\ln(1/k)} \right] \quad (17)$$

Fuerza ejercida por el fluido sobre el sólido interior.

$$F_z (r) = \tau_{rz} A \quad (18)$$

De la ecuación (10):

$$\tau_{rz} = \frac{(P_0 - P_L) R}{2 L} \left[\left(\frac{r}{R} \right) - \frac{(1-k^2)}{2 \ln(1/k)} \left(\frac{R}{r} \right) \right] \quad (10)$$

Área de contacto.

$$A (r) = 2 \pi r L \quad (19)$$

Al sustituir las ecuaciones (10) y (19) en (18):

$$F_z (r) = \frac{(P_0 - P_L) R}{2 L} \left[\left(\frac{r}{R} \right) - \frac{(1-k^2)}{2 \ln(1/k)} \left(\frac{R}{r} \right) \right] \times (2 \pi r L)$$

$$F_z(r)=\pi(P_0-P_L)R\left[\left(\frac{r^2}{R}\right)-\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}R\right] \tag{20}$$

Para la capa de fluido sobre la superficie interior (de menor diámetro), $r = k\,R$. Al evaluar la ecuación (20) en $r = k\,R$:

$$F_z(k\,R)=\pi(P_0-P_L)R\left\{\left[\frac{(k\,R)^2}{R}\right]-\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}R\right\}$$

$$F_z(k\,R)=\pi(P_0-P_L)R\left[\frac{k^2R^2}{R}-\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}R\right]$$

$$F_z(k\,R)=\pi(P_0-P_L)R\left[k^2R-\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}R\right]$$

$$F_z(k\,R)=\pi(P_0-P_L)R^2\left[k^2-\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}\right] \tag{21}$$

Para la capa de fluido sobre la superficie exterior (de mayor diámetro), $r = R$. Al evaluar la ecuación (20) en $r = R$:

$$F_z(R)=\pi(P_0-P_L)R\left\{\left[\frac{(R)^2}{R}\right]-\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}R\right\}$$

$$F_z(R)=\pi(P_0-P_L)R\left[\frac{R^2}{R}-\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}R\right]$$

$$F_z(R)=\pi(P_0-P_L)R\left[R-\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}R\right]$$

$$F_z(R)=\pi(P_0-P_L)R^2\left[1-\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}\right] \tag{22}$$

Fuerza total.

$$F_z=-F_z(k\,R)+F_z(R) \tag{23}$$

Al sustituir las ecuaciones (21) y (22) en la ecuación (23):

$$F_z=-\pi(P_0-P_L)R^2\left[k^2-\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}\right]+\pi(P_0-P_L)R^2\left[1-\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}\right]$$

$$F_z = \pi (P_0 - P_L) R^2 \left\{ \left[1 - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} \right] - \left[k^2 - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} \right] \right\}$$

$$F_z = \pi (P_0 - P_L) R^2 \left[1 - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} - k^2 + \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} \right]$$

$$F_z = \pi (P_0 - P_L) R^2 (1-k^2) \qquad (24)$$

Esta fuerza es equivalente a la diferencia de presión $P_0 - P_L$ por el área de flujo $\pi R^2 (1 - k^2)$.

Cuando k se hace cero las ecuaciones de v_z y τ_{rz} se transforman en las correspondientes al flujo en tubos circulares.

Comprobación analítica.

Caso límite v_z.

$$v_z = \lim_{k\to 0} \frac{(P_0 - P_L) R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \ln\left(\frac{r}{R} \right) \right]$$

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L) R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \ln\left(\frac{r}{R} \right) \lim_{k\to 0} \left[\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \right] \right]$$

Aplicando la regla de L´Hopital:

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L) R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \ln\left(\frac{r}{R} \right) \lim_{k\to 0} \left(\frac{-2k}{k(-1/k^2)} \right) \right]$$

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L) R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \ln\left(\frac{r}{R} \right) \lim_{k\to 0} \left(\frac{2}{1/k^2} \right) \right]$$

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L) R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \ln\left(\frac{r}{R} \right) \lim_{k\to 0} (2k^2) \right]$$

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L) R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \ln\left(\frac{r}{R} \right) (0) \right]$$

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L) R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

La ecuación obtenida es la correspondiente a la distribución de velocidad para el flujo en un tubo circular (8).

Caso límite τ_{rz}.

$$\tau_{rz}=\lim_{k\to 0}\frac{(P_0-P_L)R}{2L}\left[\left(\frac{r}{R}\right)-\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}\left(\frac{R}{r}\right)\right]$$

$$\tau_{rz}=\frac{(P_0-P_L)R}{2L}\left\{\left(\frac{r}{R}\right)-\left(\frac{R}{r}\right)\lim_{k\to 0}\left[\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}\right]\right\}$$

$$\tau_{rz}=\frac{(P_0-P_L)R}{2L}\left\{\left(\frac{r}{R}\right)-\left(\frac{R}{r}\right)(0)\right\}$$

$$\tau_{rz}=\frac{(P_0-P_L)R}{2L}\left\{\left(\frac{r}{R}\right)\right\}$$

$$\tau_{rz}=\frac{(P_0-P_L)}{2L}r$$

La ecuación obtenida es la correspondiente a la distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento para el flujo en un tubo circular (4).