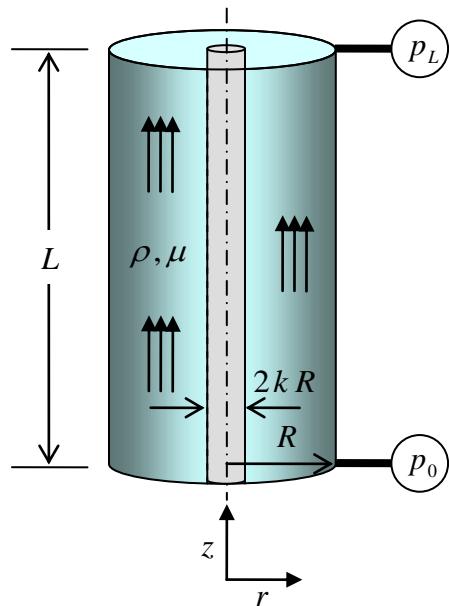


**Sección 2.4 del Bird. Página 2.18.**

**Flujo a través de una sección de corona circular.** Un fluido incompresible fluye en estado estacionario a través de la región comprendida entre dos cilindros circulares coaxiales de radios  $kR$  y  $R$ .



Determinar.

- Distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento.
- Distribución de velocidad.
- Velocidad máxima.
- Velocidad media.
- Velocidad volumétrica de flujo.
- Componente de la fuerza  $F$  del fluido sobre el sólido interior.
- Componente de la fuerza  $F$  del fluido sobre el sólido exterior.

Solución.

El ejercicio propuesto difiere del ejercicio 1 sólo en las condiciones de borde:

Para  $r = kR$ :  $v_z = 0$  y para  $r = R$ :  $v_z = 0$ .

Condiciones:

Estado estacionario.

Flujo laminar.

Propiedades del fluido constantes ( $\rho, \mu$ ).

Fluido Newtoniano.

Efectos de borde despreciables.

Flujo longitudinal (en dirección  $z$ ):  $v_r = 0, v_\theta = 0, v_z \neq 0$ .

La velocidad varía en función de  $r$ :  $v_z = v_z(r)$ .

Balance de cantidad de movimiento.

$$2\pi r L \tau_{rz} \Big|_r - 2\pi r L \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} + 2\pi r \Delta r L \rho g_z + 2\pi r \Delta r (p_0 - p_L) = 0$$

$g_z$  es la componente gravitacional en la dirección del flujo. En este caso  $g_z = g$ .

$$2\pi r L \tau_{rz} \Big|_r - 2\pi r L \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} + 2\pi r \Delta r L \rho g + 2\pi r \Delta r (p_0 - p_L) = 0 \quad (1)$$

Al dividir entre  $2\pi L$ :

$$r \tau_{rz} \Big|_r - r \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} + r \Delta r \rho g_z + r \Delta r \frac{(p_0 - p_L)}{L} = 0$$

$$r \tau_{rz} \Big|_r - r \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} + \left( \rho g + \frac{p_0 - p_L}{L} \right) r \Delta r = 0$$

$$\text{Sea } \rho g + \frac{p_0 - p_L}{L} = \frac{P_0 - P_L}{L}$$

$$r \tau_{rz} \Big|_r - r \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} + \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) r \Delta r = 0$$

$$r \tau_{rz} \Big|_r - r \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} = - \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) r \Delta r$$

Al multiplicar por  $(-1)$  la ecuación anterior:

$$r \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} - r \tau_{rz} \Big|_r = \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) r \Delta r$$

$$\frac{r \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} - r \tau_{rz} \Big|_r}{\Delta r} = \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) r$$

Tomando el límite cuando  $\Delta r \rightarrow 0$  en la ecuación anterior:

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{r \tau_{rz}|_{r+\Delta r} - r \tau_{rz}|_r}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) r$$

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{r \tau_{rz}|_{r+\Delta r} - r \tau_{rz}|_r}{\Delta r} = \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) r$$

Aplicando la definición de derivada:

$$\frac{d}{dr}(r \tau_{rz}) = \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) r$$

Al separar variables en la ecuación anterior:

$$d(r \tau_{rz}) = \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) r dr$$

Integrando ambos miembros de la ecuación:

$$\int d(r \tau_{rz}) = \int \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) r dr$$

$$\int d(r \tau_{rz}) = \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) \int r dr$$

La integración conduce a:

$$r \tau_{rz} = \left( \frac{P_0 - P_L}{2L} \right) \left( \frac{r^2}{2} \right) + C_1$$

$$r \tau_{rz} = \left( \frac{P_0 - P_L}{2L} \right) r^2 + C_1$$

$$\tau_{rz} = \left( \frac{P_0 - P_L}{2L} \right) r + \frac{C_1}{r} \quad (2)$$

La constante  $C_1$  no puede determinarse de forma inmediata, puesto que no disponemos de información acerca de la densidad de flujo de cantidad de movimiento en ninguna de las dos superficies  $x = kR$  ó  $x = R$ .

Fluido Newtoniano:

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr} \quad (3)$$

Al sustituir la ecuación (3) en la ecuación (2)

$$-\mu \frac{dv_z}{dr} = \left( \frac{P_0 - P_L}{2L} \right) r + \frac{C_1}{r}$$

Al separar las variables en la ecuación anterior:

$$dv_z = \left[ -\left( \frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right) r - \frac{C_1}{\mu r} \right] dr$$

Al integrar ambos miembros de la ecuación:

$$\int dv_z = \int \left[ -\left( \frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right) r - \frac{C_1}{\mu r} \right] dr$$

$$v_z = \int -\left( \frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right) r dr - \int \frac{C_1}{\mu} \frac{dr}{r}$$

$$v_z = -\left( \frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right) \frac{r^2}{2} - \frac{C_1}{\mu} \ln r + C_2$$

La integración conduce a:

$$\begin{aligned} v_z &= -\left( \frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right) \left( \frac{r^2}{2} \right) - \frac{C_1}{\mu} \ln r + C_2 \\ v_z &= -\left( \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} \right) r^2 - \frac{C_1}{\mu} \ln r + C_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Condición de borde: Para  $r = kR$ :  $v_z = 0$ .

Al sustituir en la ecuación (4):

$$\begin{aligned} 0 &= -\left( \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} \right) (kR)^2 - \frac{C_1}{\mu} \ln(kR) + C_2 \\ 0 &= -\left( \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} \right) k^2 R^2 - \frac{C_1}{\mu} \ln(kR) + C_2 \end{aligned} \quad (5)$$

Condición de borde: Para  $r = R$ :  $v_z = 0$ .

Al sustituir en la ecuación (4):

$$\begin{aligned} 0 &= -\left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)(R)^2 - \frac{C_1}{\mu} \ln(R) + C_2 \\ 0 &= -\left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)R^2 - \frac{C_1}{\mu} \ln R + C_2 \end{aligned} \quad (6)$$

Al restar las ecuaciones (5) y (6):

$$\begin{aligned} \left[ -\left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)k^2 R^2 - \frac{C_1}{\mu} \ln(kR) + C_2 \right] - \left[ -\left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)R^2 - \frac{C_1}{\mu} \ln R + C_2 \right] &= 0 \\ -\left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)k^2 R^2 - \frac{C_1}{\mu} \ln(kR) + C_2 + \left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)R^2 + \frac{C_1}{\mu} \ln R - C_2 &= 0 \\ -\left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)k^2 R^2 - \frac{C_1}{\mu} \ln(kR) + \left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)R^2 + \frac{C_1}{\mu} \ln R &= 0 \\ \left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)R^2(1 - k^2) + \frac{C_1}{\mu} [\ln R - \ln(kR)] &= 0 \end{aligned}$$

Por propiedades de los logaritmos:  $\ln(kR) = \ln k + \ln R$

$$\begin{aligned} \left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)R^2(1 - k^2) + \frac{C_1}{\mu} (\ln R - \ln k - \ln R) &= 0 \\ \left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)R^2(1 - k^2) + \frac{C_1}{\mu} (-\ln k) &= 0 \\ \left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)R^2(1 - k^2) + \frac{C_1}{\mu} \ln(1/k) &= 0 \end{aligned}$$

Al simplificar  $\mu$ :

$$\left(\frac{P_0 - P_L}{4L}\right)R^2(1 - k^2) + C_1 \ln(1/k) = 0$$

Al despejar  $C_1$  de la ecuación anterior:

$$C_1 = -\frac{(P_0 - P_L)R^2}{4L} \frac{(1 - k^2)}{\ln(1/k)} \quad (7)$$

Al sustituir  $C_1$  en la ecuación (4) y despejar  $C_2$ :

$$\begin{aligned}
 0 &= -\left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)R^2 - \left[-\frac{(P_0 - P_L)R^2(1-k^2)}{4L} \frac{\ln(1/k)}{\mu}\right] \ln R + C_2 \\
 0 &= -\left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)R^2 + \frac{(P_0 - P_L)R^2(1-k^2)}{4\mu L} \frac{\ln(1/k)}{\ln(1/k)} \ln R + C_2 \\
 C_2 &= \left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)R^2 - \frac{(P_0 - P_L)R^2(1-k^2)}{4\mu L} \frac{\ln(1/k)}{\ln(1/k)} \ln R
 \end{aligned} \tag{8}$$

Al sustituir las ecuaciones (7) y (8) en la ecuación (4), la distribución de velocidad se expresa de la siguiente manera:

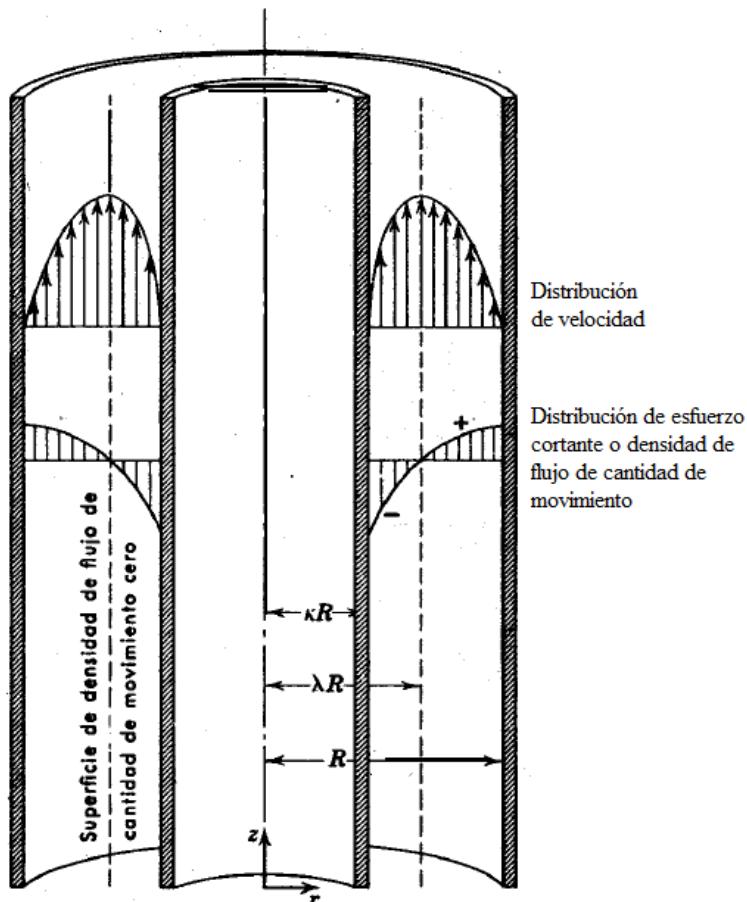
$$\begin{aligned}
 v_z &= -\left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)r^2 - \left[-\frac{(P_0 - P_L)R^2(1-k^2)}{4L} \frac{\ln(1/k)}{\mu}\right] \ln r + \left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)R^2 - \frac{(P_0 - P_L)R^2(1-k^2)}{4\mu L} \frac{\ln(1/k)}{\ln(1/k)} \ln R \\
 v_z &= -\left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)r^2 + \frac{(P_0 - P_L)R^2(1-k^2)}{4\mu L} \frac{\ln(1/k)}{\ln(1/k)} \ln r + \left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)R^2 - \frac{(P_0 - P_L)R^2(1-k^2)}{4\mu L} \frac{\ln(1/k)}{\ln(1/k)} \ln R \\
 v_z &= \left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)(R^2 - r^2) + \frac{(P_0 - P_L)R^2(1-k^2)}{4\mu L} \frac{\ln(1/k)}{\ln(1/k)} (\ln r - \ln R) \\
 v_z &= \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{(P_0 - P_L)R^2(1-k^2)}{4\mu L} \frac{\ln(1/k)}{\ln(1/k)} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \\
 v_z &= \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] + \frac{(P_0 - P_L)R^2(1-k^2)}{4\mu L} \frac{\ln(1/k)}{\ln(1/k)} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \\
 v_z &= \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \ln\left(\frac{r}{R}\right)\right]
 \end{aligned} \tag{9}$$

Distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento.

Al sustituir la ecuación (7) en la ecuación (2):

$$\begin{aligned}
 \tau_{rz} &= \left( \frac{P_0 - P_L}{2L} \right) r + \frac{\left[ -\frac{(P_0 - P_L) R^2}{4L} \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \right]}{r} \\
 \tau_{rz} &= \left( \frac{P_0 - P_L}{2L} \right) r - \frac{(P_0 - P_L) R^2}{4L} \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \frac{1}{r} \\
 \tau_{rz} &= \frac{(P_0 - P_L) R}{2L} \left( \frac{r}{R} \right) - \frac{(P_0 - P_L) R}{4L} \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \left( \frac{R}{r} \right) \\
 \tau_{rz} &= \frac{(P_0 - P_L) R}{2L} \left[ \left( \frac{r}{R} \right) - \frac{(1-k^2)}{2 \ln(1/k)} \left( \frac{R}{r} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{10}$$

En la figura siguiente se muestra la distribución de velocidad y la distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento.



Velocidad máxima.

La velocidad es máxima cuando  $\tau_{rz} = 0$ . De la ecuación (10):

$$\begin{aligned}
 \frac{(P_0 - P_L)R}{2L} \left[ \left( \frac{r}{R} \right) - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} \left( \frac{R}{r} \right) \right] &= 0 \\
 \left( \frac{r}{R} \right) - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} \left( \frac{R}{r} \right) &= 0 \\
 \frac{r}{R} - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} \left( \frac{R}{r} \right) &= 0 \\
 \frac{r}{R} &= \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} \left( \frac{R}{r} \right) \\
 \frac{r^2}{R^2} &= \frac{1-k^2}{2\ln(1/k)} \\
 r^2 &= \frac{1-k^2}{2\ln(1/k)} R^2 \\
 r &= \sqrt{\frac{1-k^2}{2\ln(1/k)} R} \tag{11}
 \end{aligned}$$

Al sustituir la ecuación (11) en la ecuación (9)

$$\begin{aligned}
 v_z &= \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \ln \left( \frac{r}{R} \right) \right] \\
 v_{z,\max} &= \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left\{ 1 - \left[ \sqrt{\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}} \right]^2 + \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \ln \left[ \sqrt{\frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)}} \right] \right\} \\
 v_{z,\max} &= \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[ 1 - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} + \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} \ln \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} \right] \\
 v_{z,\max} &= \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left\{ 1 - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} \left[ 1 - \ln \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} \right] \right\} \tag{12}
 \end{aligned}$$

Velocidad media.

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{kR}^R v_z r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_{kR}^R r dr d\theta} \quad (13)$$

Al sustituir la ecuación (9) en la ecuación (13):

$$\begin{aligned} \langle v_z \rangle &= \frac{\int_0^{2\pi} \int_{kR}^R \left\{ \frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \ln \left( \frac{r}{R} \right) \right] \right\} r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_{kR}^R r dr d\theta} \\ \langle v_z \rangle &= \frac{\frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \int_0^{2\pi} \int_{kR}^R \left[ 1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} (\ln r - \ln R) \right] r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_{kR}^R r dr d\theta} \\ \langle v_z \rangle &= \frac{\frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{kR}^R \left[ 1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} (\ln r - \ln R) \right] r dr \right\} d\theta}{\int_0^{2\pi} \left[ \int_{kR}^R r dr \right] d\theta} \\ \langle v_z \rangle &= \frac{\frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \int_{kR}^R \left[ 1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} (\ln r - \ln R) \right] r dr \int_0^{2\pi} d\theta}{\int_{kR}^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta} \end{aligned}$$

Al simplificar  $\int_0^{2\pi} d\theta$ :

$$\begin{aligned} \langle v_z \rangle &= \frac{\frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \int_{kR}^R \left[ 1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} (\ln r - \ln R) \right] r dr}{\int_{kR}^R r dr} \\ \langle v_z \rangle &= \frac{\frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \int_{kR}^R \left\{ \left[ 1 - \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \ln R \right] - \frac{r^2}{R^2} + \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \ln r \right\} r dr}{\int_{kR}^R r dr} \end{aligned}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \left\{ \left[ 1 - \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \ln R \right] \int_{kR}^R r dr - \frac{1}{R^2} \int_{kR}^R r^3 dr + \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \int_{kR}^R r \ln r dr \right\}}{\int_{kR}^R r dr}$$

La integración conduce a:

$$\langle v_z \rangle = \frac{\frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \left\{ \left[ 1 - \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \ln R \right] \left( \frac{r^2}{2} \Big|_{kR}^R \right) - \frac{1}{R^2} \left( \frac{r^4}{4} \Big|_{kR}^R \right) + \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \left( \frac{r^2 \ln r}{2} - \frac{r^2}{4} \Big|_{kR}^R \right) \right\}}{\left( \frac{r^2}{2} \Big|_{kR}^R \right)}$$

$$\begin{aligned} \langle v_z \rangle &= \frac{\frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \left\{ \left[ 1 - \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \ln R \right] \left( \frac{R^2 - k^2 R^2}{2} \right) - \frac{1}{R^2} \left( \frac{R^4 - k^4 R^4}{4} \right) + \right.}{\left. \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \left( \frac{R^2 \ln R - k^2 R^2 \ln(kR)}{2} - \frac{R^2 - k^2 R^2}{4} \right) \right\}}{\frac{R^2 (1-k^2)}{2}} \\ \langle v_z \rangle &= \frac{\frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \left[ \frac{R^2 - k^2 R^2}{2} - \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \left( \frac{R^2 - k^2 R^2}{2} \right) \ln R - \frac{1}{R^2} \left( \frac{R^4 - k^4 R^4}{4} \right) + \right.}{\left. \frac{(1-k^2)}{2 \ln(1/k)} R^2 \ln R - \frac{(1-k^2)}{2 \ln(1/k)} k^2 R^2 \ln(kR) - \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \frac{(R^2 - k^2 R^2)}{4} \right]}{\frac{R^2 (1-k^2)}{2}} \\ \langle v_z \rangle &= \frac{\frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \left[ \frac{R^2}{2} - \frac{k^2 R^2}{2} - \frac{(1-k^2)}{2 \ln(1/k)} R^2 \ln R + \frac{(1-k^2)}{2 \ln(1/k)} k^2 R^2 \ln R - \frac{R^2}{4} + \frac{k^4 R^2}{4} + \right.}{\left. \frac{(1-k^2)}{2 \ln(1/k)} R^2 \ln R - \frac{(1-k^2)}{2 \ln(1/k)} k^2 R^2 \ln(kR) - \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \frac{R^2 (1-k^2)}{4} \right]}{\frac{R^2 (1-k^2)}{2}} \end{aligned}$$

Al asociar términos semejantes:

$$\begin{aligned}
 < v_z > = & \frac{\frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \left[ \frac{R^2}{4} - \frac{k^2 R^2}{2} + \frac{k^4 R^2}{4} + \frac{(1-k^2)}{2 \ln(1/k)} k^2 R^2 \ln R - \frac{(1-k^2)}{2 \ln(1/k)} k^2 R^2 \ln(kR) \right]}{\frac{R^2(1-k^2)}{2}} \\
 < v_z > = & \frac{\frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \left[ \frac{R^2}{4} - \frac{k^2 R^2}{2} + \frac{k^4 R^2}{4} + \frac{(1-k^2)}{2 \ln(1/k)} k^2 R^2 [\ln R - \ln(kR)] - \frac{R^2(1-k^2)^2}{4 \ln(1/k)} \right]}{\frac{R^2(1-k^2)}{2}} \\
 < v_z > = & \frac{\frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \left[ \frac{R^2}{4} - \frac{k^2 R^2}{2} + \frac{k^4 R^2}{4} + \frac{(1-k^2)}{2 \ln(1/k)} k^2 R^2 \ln(R/kR) - \frac{R^2(1-k^2)^2}{4 \ln(1/k)} \right]}{\frac{R^2(1-k^2)}{2}} \\
 < v_z > = & \frac{\frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \left[ \frac{R^2}{4} - \frac{k^2 R^2}{2} + \frac{k^4 R^2}{4} + \frac{(1-k^2)}{2 \ln(1/k)} k^2 R^2 \ln(1/k) - \frac{R^2(1-k^2)^2}{4 \ln(1/k)} \right]}{\frac{R^2(1-k^2)}{2}} \\
 < v_z > = & \frac{\frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \left[ \frac{R^2}{4} - \frac{k^2 R^2}{2} + \frac{k^4 R^2}{4} + \frac{(1-k^2)}{2} k^2 R^2 - \frac{R^2(1-k^2)^2}{4 \ln(1/k)} \right]}{\frac{R^2(1-k^2)}{2}} \\
 < v_z > = & \frac{\frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \left[ \frac{R^2}{4} - \frac{k^2 R^2}{2} + \frac{k^4 R^2}{4} + \frac{k^2 R^2}{2} - \frac{k^4 R^2}{2} - \frac{R^2(1-k^2)^2}{4 \ln(1/k)} \right]}{\frac{R^2(1-k^2)}{2}} \\
 < v_z > = & \frac{\frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \left[ \frac{R^2}{4} - \frac{k^4 R^2}{4} - \frac{R^2(1-k^2)^2}{4 \ln(1/k)} \right]}{\frac{R^2(1-k^2)}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 < v_z > &= \frac{\frac{(P_0 - P_L)R^4}{16\mu L} \left[ 1 - k^4 - \frac{(1 - k^2)^2}{\ln(1/k)} \right]}{\frac{R^2(1 - k^2)}{2}} \\
 < v_z > &= \frac{\frac{(P_0 - P_L)R^2}{8\mu L} \left[ 1 - k^4 - \frac{(1 - k^2)^2}{\ln(1/k)} \right]}{1 - k^2} \\
 < v_z > &= \frac{(P_0 - P_L)R^2}{8\mu L} \left[ \frac{1 - k^4}{1 - k^2} - \frac{1 - k^2}{\ln(1/k)} \right]
 \end{aligned} \tag{14}$$

Caudal entre los dos cilindros.

$$Q = < v_z > A \tag{15}$$

Área perpendicular al flujo:

$$\begin{aligned}
 A &= \pi R^2 - \pi (k R)^2 \\
 A &= \pi R^2 (1 - k^2)
 \end{aligned} \tag{16}$$

Al sustituir las ecuaciones (14) y (16) en la ecuación (15):

$$\begin{aligned}
 Q &= \left\{ \frac{(P_0 - P_L)R^2}{8\mu L} \left[ \frac{1 - k^4}{1 - k^2} - \frac{1 - k^2}{\ln(1/k)} \right] \right\} [\pi R^2 (1 - k^2)] \\
 Q &= \frac{\pi(P_0 - P_L)R^4}{8\mu L} \left[ (1 - k^4) - \frac{(1 - k^2)^2}{\ln(1/k)} \right]
 \end{aligned} \tag{17}$$

Fuerza ejercida por el fluido sobre el sólido interior.

$$F_z(r) = \tau_{rz} A \tag{18}$$

De la ecuación (10):

$$\tau_{rz} = \frac{(P_0 - P_L)R}{2L} \left[ \left( \frac{r}{R} \right) - \frac{(1 - k^2)}{2 \ln(1/k)} \left( \frac{R}{r} \right) \right] \tag{10}$$

Área de contacto.

$$A(r) = 2\pi r L \tag{19}$$

Al sustituir las ecuaciones (10) y (19) en (18):

$$F_z(r) = \frac{(P_0 - P_L)R}{2L} \left[ \left( \frac{r}{R} \right) - \frac{(1 - k^2)}{2 \ln(1/k)} \left( \frac{R}{r} \right) \right] \times (2\pi r L)$$

$$F_z(r) = \pi(P_0 - P_L)R \left[ \left( \frac{r^2}{R} \right) - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} R \right] \quad (20)$$

Para la capa de fluido sobre la superficie interior (de menor diámetro),  $r = kR$ . Al evaluar la ecuación (20) en  $r = kR$ :

$$\begin{aligned} F_z(kR) &= \pi(P_0 - P_L)R \left\{ \left[ \frac{(kR)^2}{R} \right] - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} R \right\} \\ F_z(kR) &= \pi(P_0 - P_L)R \left[ \frac{k^2R^2}{R} - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} R \right] \\ F_z(kR) &= \pi(P_0 - P_L)R \left[ k^2R - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} R \right] \\ F_z(kR) &= \pi(P_0 - P_L)R^2 \left[ k^2 - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

Para la capa de fluido sobre la superficie exterior (de mayor diámetro),  $r = R$ . Al evaluar la ecuación (20) en  $r = R$ :

$$\begin{aligned} F_z(R) &= \pi(P_0 - P_L)R \left\{ \left[ \frac{(R)^2}{R} \right] - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} R \right\} \\ F_z(R) &= \pi(P_0 - P_L)R \left[ \frac{R^2}{R} - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} R \right] \\ F_z(R) &= \pi(P_0 - P_L)R \left[ R - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} R \right] \\ F_z(R) &= \pi(P_0 - P_L)R^2 \left[ 1 - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

Fuerza total.

$$F_z = -F_z(kR) + F_z(R) \quad (23)$$

Al sustituir las ecuaciones (21) y (22) en la ecuación (23):

$$F_z = -\pi(P_0 - P_L)R^2 \left[ k^2 - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} \right] + \pi(P_0 - P_L)R^2 \left[ 1 - \frac{(1-k^2)}{2\ln(1/k)} \right]$$

$$\begin{aligned}
 F_z &= \pi(P_0 - P_L)R^2 \left\{ \left[ 1 - \frac{(1-k^2)}{2 \ln(1/k)} \right] - \left[ k^2 - \frac{(1-k^2)}{2 \ln(1/k)} \right] \right\} \\
 F_z &= \pi(P_0 - P_L)R^2 \left[ 1 - \frac{(1-k^2)}{2 \ln(1/k)} - k^2 + \frac{(1-k^2)}{2 \ln(1/k)} \right] \\
 F_z &= \pi(P_0 - P_L)R^2(1-k^2)
 \end{aligned} \tag{24}$$

Esta fuerza es equivalente a la diferencia de presión  $P_0 - P_L$  por el área de flujo  $\pi R^2 (1 - k^2)$ .

Cuando  $k$  se hace cero las ecuaciones de  $v_z$  y  $\tau_{rz}$  se transforman en las correspondientes al flujo en tubos circulares.

Comprobación analítica.

Caso límite  $v_z$ .

$$\begin{aligned}
 v_z &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \ln \left( \frac{r}{R} \right) \right] \\
 v_z &= \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \ln \left( \frac{r}{R} \right) \lim_{k \rightarrow 0} \left[ \frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} \right] \right]
 \end{aligned}$$

Aplicando la regla de L'Hopital:

$$\begin{aligned}
 v_z &= \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \ln \left( \frac{r}{R} \right) \lim_{k \rightarrow 0} \left( \frac{-2k}{k(-1/k^2)} \right) \right] \\
 v_z &= \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \ln \left( \frac{r}{R} \right) \lim_{k \rightarrow 0} \left( \frac{2}{1/k^2} \right) \right] \\
 v_z &= \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \ln \left( \frac{r}{R} \right) \lim_{k \rightarrow 0} (2k^2) \right] \\
 v_z &= \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \ln \left( \frac{r}{R} \right)(0) \right] \\
 v_z &= \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

La ecuación obtenida es la correspondiente a la distribución de velocidad para el flujo en un tubo circular (8).

Caso límite  $\tau_{rz}$ .

$$\tau_{rz} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{(P_0 - P_L)R}{2L} \left[ \left( \frac{r}{R} \right) - \frac{(1-k^2)}{2 \ln(1/k)} \left( \frac{R}{r} \right) \right]$$

$$\tau_{rz} = \frac{(P_0 - P_L)R}{2L} \left\{ \left( \frac{r}{R} \right) - \left( \frac{R}{r} \right) \lim_{k \rightarrow 0} \left[ \frac{(1-k^2)}{2 \ln(1/k)} \right] \right\}$$

$$\tau_{rz} = \frac{(P_0 - P_L)R}{2L} \left\{ \left( \frac{r}{R} \right) - \left( \frac{R}{r} \right)(0) \right\}$$

$$\tau_{rz} = \frac{(P_0 - P_L)R}{2L} \left\{ \left( \frac{r}{R} \right) \right\}$$

$$\tau_{rz} = \frac{(P_0 - P_L)R}{2L} r$$

La ecuación obtenida es la correspondiente a la distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento para el flujo en un tubo circular (4).

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **Distribuciones de Velocidad en Flujo Laminar, Sistemas cilíndricos**, perteneciente a las asignaturas **Fenómenos de Transporte y Mecánica de Fluidos**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

<http://www.tutoruniversitario.com/>

Si Usted requiere la resolución de ejercicios adicionales acerca de ésta u otras asignaturas, contáctenos a través de los siguientes medios:

- WhatsApp: +58-4249744352 (En forma directa o desde nuestra página web).
- E-mail: [medinawj@gmail.com](mailto:medinawj@gmail.com)

Lista de asignaturas en las cuales podemos ayudarle:

Cálculo Diferencial.	Cálculo Integral.	Cálculo Vectorial.
Ecuaciones Diferenciales.	Trigonometría.	Matemáticas Aplicadas.
Matemáticas Financieras.	Álgebra Lineal.	Métodos Numéricos.
Estadística.	Física (Mecánica).	Física (Electricidad).
Mecánica Vectorial (Estática).	Química Inorgánica.	Fisicoquímica.
Termodinámica.	Termodinámica Química.	Mecánica de Fluidos.
Fenómenos de Transporte.	Transferencia de Calor.	Ingeniería Económica.