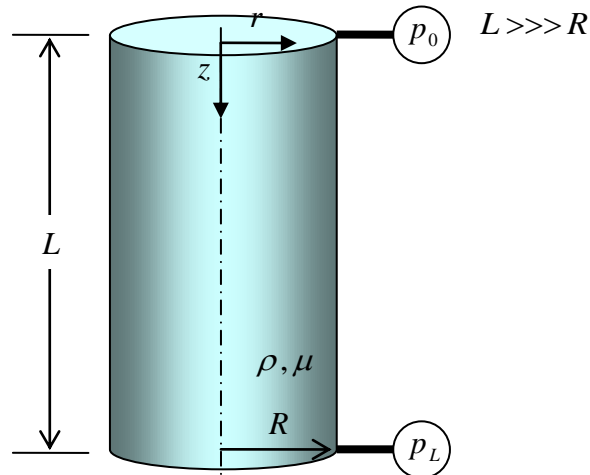


Sección 2.3 del Bird. Página 2-10.

Flujo a través de un tubo circular. Consideremos el flujo laminar en estado estacionario de un fluido de densidad constante ρ en un tubo <<muy largo>> de longitud L y radio R .



Determinar:

- Distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento.
- Distribución de velocidad.
- Velocidad máxima.
- Velocidad media.
- Velocidad volumétrica de flujo.
- Componente de la fuerza F del fluido sobre la superficie.

Solución.

Condiciones:

Estado estacionario.

Flujo laminar.

Propiedades del fluido constantes (ρ, μ).

Fluido Newtoniano.

Efectos de borde despreciables.

Flujo longitudinal (en dirección z): $v_r = 0, v_\theta = 0, v_z \neq 0$.

La velocidad varía en función de r : $v_z = v_z(r)$.

Balance de cantidad de movimiento.

$$2\pi r L \tau_{rz} \Big|_r - 2\pi r L \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} + 2\pi r \Delta r L \rho g_z + 2\pi r \Delta r (p_0 - p_L) = 0$$

g_z es la componente gravitacional en la dirección del flujo. En este caso $g_z = g$.

$$2\pi r L \tau_{rz} \Big|_r - 2\pi r L \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} + 2\pi r \Delta r L \rho g + 2\pi r \Delta r (p_0 - p_L) = 0 \quad (1)$$

Al dividir entre $2\pi L$:

$$r \tau_{rz} \Big|_r - r \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} + r \Delta r \rho g + r \Delta r \frac{(p_0 - p_L)}{L} = 0$$

$$r \tau_{rz} \Big|_r - r \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} + \left(\rho g + \frac{p_0 - p_L}{L} \right) r \Delta r = 0$$

$$\text{Sea } \rho g + \frac{p_0 - p_L}{L} = \frac{P_0 - P_L}{L}$$

$$r \tau_{rz} \Big|_r - r \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} + \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right) r \Delta r = 0$$

$$r \tau_{rz} \Big|_r - r \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} = - \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right) r \Delta r$$

Al multiplicar por (-1) la ecuación anterior:

$$r \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} - r \tau_{rz} \Big|_r = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right) r \Delta r$$

$$\frac{r \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} - r \tau_{rz} \Big|_r}{\Delta r} = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right) r$$

Tomando el límite cuando $\Delta r \rightarrow 0$ en la ecuación anterior:

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{r \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} - r \tau_{rz} \Big|_r}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right) r$$

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{r \tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} - r \tau_{rz} \Big|_r}{\Delta r} = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right) r$$

Aplicando la definición de derivada:

$$\frac{d}{dr} (r \tau_{rz}) = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right) r$$

Al separar variables en la ecuación anterior:

$$d(r\tau_{rz}) = \left(\frac{P_0 - P_L}{L}\right) r dr$$

Integrando ambos miembros de la ecuación:

$$\int d(r\tau_{rz}) = \int \left(\frac{P_0 - P_L}{L}\right) r dr$$

$$\int d(r\tau_{rz}) = \left(\frac{P_0 - P_L}{L}\right) \int r dr$$

La integración conduce a:

$$r\tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{2L}\right) \left(\frac{r^2}{2}\right) + C_1$$

$$r\tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{2L}\right) r^2 + C_1$$

$$\tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{2L}\right) r + \frac{C_1}{r} \quad (2)$$

Condición de borde: Para $r = 0$, $\tau_{rz} \neq \infty$.

$$C_1 = 0 \quad (3)$$

Al sustituir la ecuación (3) en la ecuación (2):

$$\tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{2L}\right) r \quad (4)$$

La ecuación (4) es la distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento.

b) Distribución de velocidad.

Fluido Newtoniano.

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr} \quad (5)$$

Al sustituir la ecuación (5) en la ecuación (4):

$$-\mu \frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{P_0 - P_L}{2L}\right) r$$

Al separar las variables en la ecuación anterior:

$$dv_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2\mu L}\right)r dr$$

Al integrar ambos miembros de la ecuación:

$$\int dv_z = \int -\left(\frac{P_0 - P_L}{2\mu L}\right)r dr$$

$$\int dv_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2\mu L}\right)\int r dr$$

La integración conduce a:

$$v_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2\mu L}\right)\left(\frac{r^2}{2}\right) + C_2$$

$$v_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)r^2 + C_2 \quad (6)$$

Condición de borde: Para $r = R$, $v_z = 0$.

Al sustituir en la ecuación (6):

$$0 = -\left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)(R)^2 + C_2$$

Al despejar C_2 en la ecuación anterior:

$$C_2 = \left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)R^2 \quad (7)$$

Al sustituir la ecuación (7) en la ecuación (6):

$$v_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)r^2 + \left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)R^2$$

$$v_z = \left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)(R^2 - r^2)$$

Al multiplicar y dividir por R^2 :

$$\begin{aligned}
 v_z &= \left(\frac{P_0 - P_L}{4 \mu L} \right) (R^2 - r^2) \times \frac{R^2}{R^2} \\
 v_z &= \frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2} \right) \\
 v_z &= \frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \left(\frac{R^2}{R^2} - \frac{r^2}{R^2} \right) \\
 v_z &= \frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \\
 v_z &= \frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \tag{8}
 \end{aligned}$$

Distribución de velocidad parabólico.

c) Velocidad máxima.

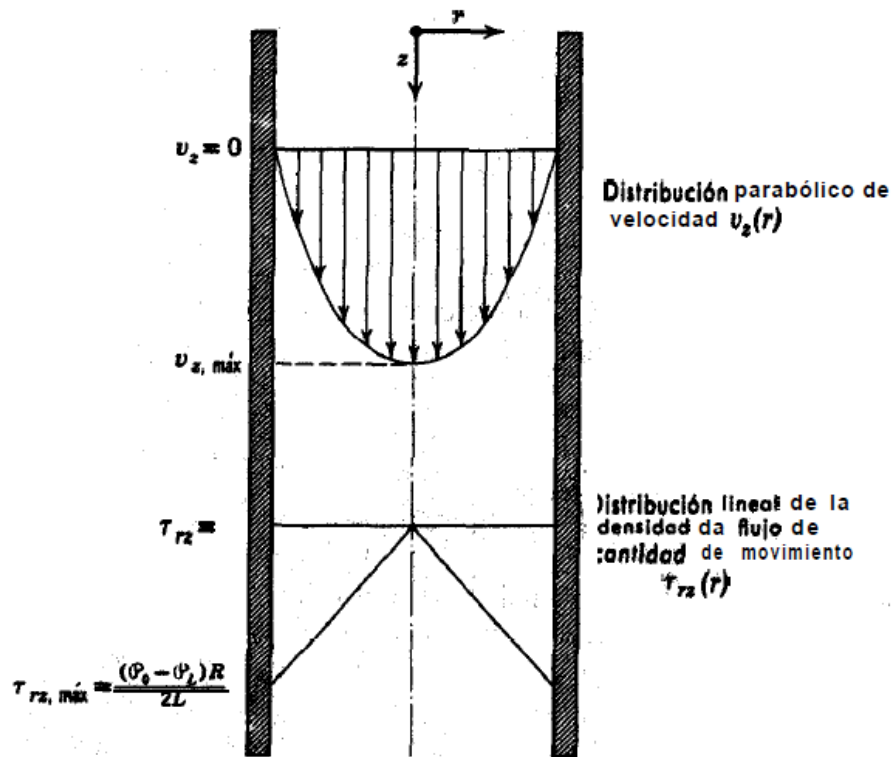
La velocidad es máxima en $r = 0$.

$$v_{z,\max} = v_z(0)$$

Al sustituir $r = 0$ en la ecuación (8):

$$\begin{aligned}
 v_{z,\max} &= \frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \left[1 - \left(\frac{0}{R} \right)^2 \right] \\
 v_{z,\max} &= \frac{(P_0 - P_L) R^2}{4 \mu L} \tag{9}
 \end{aligned}$$

En la figura siguiente se muestra la distribución de velocidad, la velocidad máxima y la distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento.



Velocidad media.

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta} \quad (10)$$

Al sustituir la ecuación (8) en la ecuación (10):

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R \left\{ \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \right\} r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2} \right) dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{(P_0 - P_L) R^2 \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2} \right) dr \int_0^{2\pi} d\theta}{\int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta}$$

Al simplificar $\int_0^{2\pi} d\theta$:

$$\langle v_z \rangle = \frac{(P_0 - P_L) R^2 \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2} \right) dr}{\int_0^R r dr}$$

La integración conduce a:

$$\langle v_z \rangle = \frac{(P_0 - P_L) R^2 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right) \Big|_0^R}{\left(\frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^R}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{(P_0 - P_L) R^2 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4} \right)}{\left(\frac{R^2}{2} \right)}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{(P_0 - P_L) R^2 \times \frac{R^2}{4}}{\frac{R^2}{2}}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{(P_0 - P_L) R^2}{8\mu L} \quad (11)$$

Velocidad volumétrica de flujo (Caudal).

$$Q = \langle v_z \rangle A \quad (12)$$

Área perpendicular al flujo:

$$A = \pi R^2 \quad (13)$$

Al sustituir las ecuaciones (11) y (13) en la ecuación (12):

$$Q = \left[\frac{(P_0 - P_L) R^2}{8 \mu L} \right] (\pi R^2)$$

$$Q = \frac{\pi (P_0 - P_L) R^4}{8 \mu L} \quad \text{Ley de Hagen - Poiseuille.} \quad (14)$$

Componente de la fuerza F del fluido sobre la superficie.

$$F_z(r) = \tau_{rz} A \quad (15)$$

De la ecuación (4):

$$\tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{2L} \right) r \quad (4)$$

Área de contacto.

$$A(r) = 2 \pi r L \quad (16)$$

Al sustituir las ecuaciones (4) y (16) en la ecuación (15):

$$F_z(r) = \left[\left(\frac{P_0 - P_L}{2L} \right) r \right] (2 \pi r L)$$

$$F_z(r) = \pi (P_0 - P_L) r^2 \quad (17)$$

Para la capa de fluido sobre la superficie de la tubería $r = R$. Al evaluar la ecuación (17) en $r = R$:

$$F_z(R) = \pi (P_0 - P_L) R^2 \quad (18)$$

Esta fuerza es equivalente a la diferencia de presión $P_0 - P_L$ por el área de flujo πR^2 .

Se sabe que $\rho g + \frac{(P_0 - P_L)}{L} = \frac{P_0 - P_L}{L}$, luego:

$$P_0 - P_L = p_0 - p_L + \rho g L \quad (19)$$

Al sustituir la ecuación (19) en la ecuación (18):

$$F_z(R) = \pi (p_0 - p_L + \rho g L) R^2$$

$$F_z(R) = \pi (p_0 - p_L) R^2 + \pi R^2 \rho g L$$

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **Distribuciones de Velocidad en Flujo Laminar, Sistemas cilíndricos**, perteneciente a las asignaturas **Fenómenos de Transporte y Mecánica de Fluidos**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

<http://www.tutoruniversitario.com/>

Si Usted requiere la resolución de ejercicios adicionales acerca de ésta u otras asignaturas, contáctenos a través de los siguientes medios:

- WhatsApp: +58-4249744352 (En forma directa o desde nuestra página web).
- E-mail: medinawj@gmail.com

Lista de asignaturas en las cuales podemos ayudarle:

Cálculo Diferencial.	Cálculo Integral.	Cálculo Vectorial.
Ecuaciones Diferenciales.	Trigonometría.	Matemáticas Aplicadas.
Matemáticas Financieras.	Álgebra Lineal.	Métodos Numéricos.
Estadística.	Física (Mecánica).	Física (Electricidad).
Mecánica Vectorial (Estática).	Química Inorgánica.	Fisicoquímica.
Termodinámica.	Termodinámica Química.	Mecánica de Fluidos.
Fenómenos de Transporte.	Transferencia de Calor.	Ingeniería Económica.