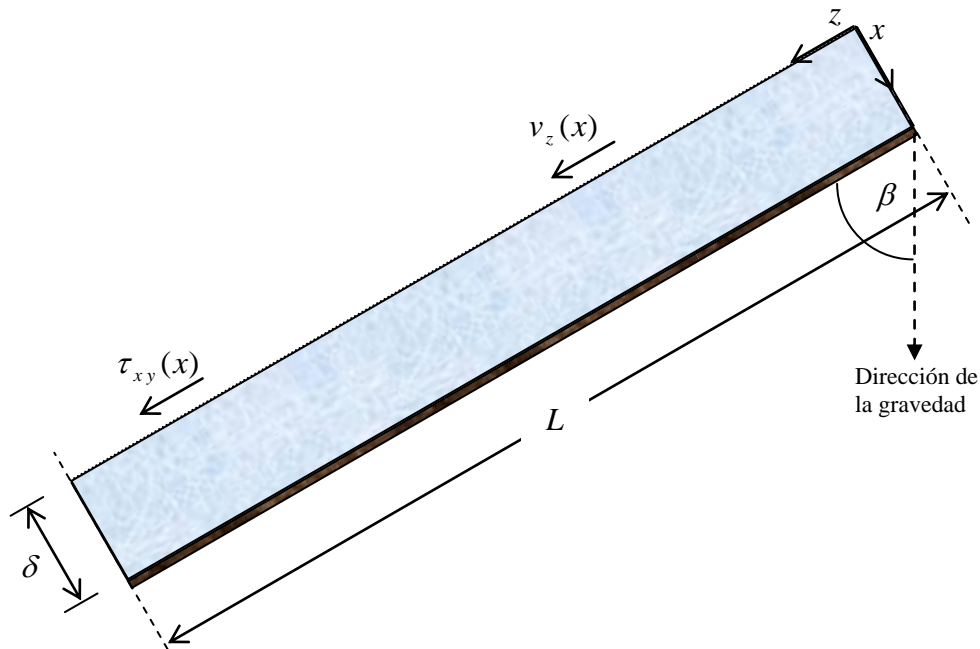


Sección 2.2 del Bird. Página 2-4.

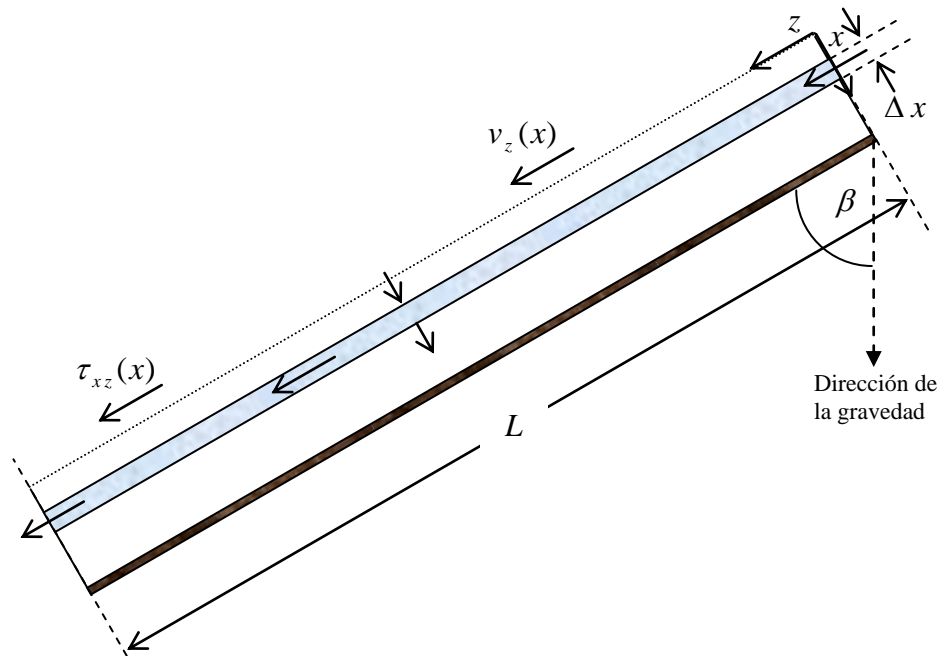
Flujo de una película descendente. Consideremos una superficie plana inclinada. Estas películas se han estudiado en relación con torres de pared mojada, experiencias de evaporación y absorción de gases y aplicación de capas de pintura a rollos de papel. Se supone que la viscosidad y densidad del fluido son constantes y se considera una región de longitud L , suficientemente alejada de los extremos de la pared, de forma que las perturbaciones de la entrada y la salida no están incluidas en L ; es decir, que en esta región el componente v_z de velocidad es independiente de z .



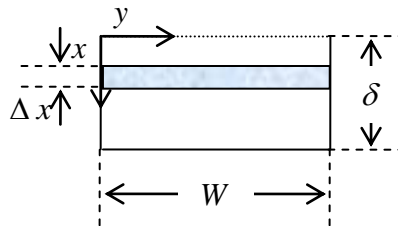
Determinar:

- Distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento.
- Distribución de velocidad.
- Velocidad máxima.
- Velocidad media.
- Velocidad volumétrica de flujo (Caudal).
- Espesor de la película.
- Componente de la fuerza F del fluido sobre la superficie.

Solución.



a) Vista de frente:



Condiciones:

Estado estacionario.

Flujo laminar.

Fluido Newtoniano.

Propiedades del fluido constantes (ρ, μ).

Efectos de borde despreciables.

Flujo en dirección z ($v_x = 0, v_y = 0, v_z \neq 0$).

La velocidad varía en función de x : $v_z = v_z(x)$.

Balance de cantidad de movimiento.

$$LW \tau_{xz} \Big|_x - LW \tau_{xz} \Big|_{x+\Delta x} + LW \Delta x \rho g_z + (p_0 - p_L)W \Delta x = 0$$

Flujo sin diferencia de presión ($p_0 - p_L = 0$).

$$LW \tau_{xz} \Big|_x - LW \tau_{xz} \Big|_{x+\Delta x} + LW \Delta x \rho g_z = 0$$

g_z es la componente gravitacional en la dirección del flujo. En este caso $g_z = g \cos \beta$.

$$LW \tau_{xz} \Big|_x - LW \tau_{xz} \Big|_{x+\Delta x} + LW \Delta x \rho g \cos \beta = 0 \quad (1)$$

Al simplificar LW :

$$\tau_{xz} \Big|_x - \tau_{xz} \Big|_{x+\Delta x} + \Delta x \rho g \cos \beta = 0$$

$$\tau_{xz} \Big|_x - \tau_{xz} \Big|_{x+\Delta x} = -\Delta x \rho g \cos \beta$$

$$\tau_{xz} \Big|_{x+\Delta x} - \tau_{xz} \Big|_x = \Delta x \rho g \cos \beta$$

$$\frac{\tau_{xz} \Big|_{x+\Delta x} - \tau_{xz} \Big|_x}{\Delta x} = \rho g \cos \beta$$

Tomando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ en la ecuación anterior:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\tau_{xz} \Big|_{x+\Delta x} - \tau_{xz} \Big|_x}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\rho g \cos \beta)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\tau_{xz} \Big|_{x+\Delta x} - \tau_{xz} \Big|_x}{\Delta x} \right) = \rho g \cos \beta$$

Aplicando la definición de derivada:

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho g \cos \beta$$

Al separar variables en la ecuación anterior:

$$d\tau_{xz} = \rho g \cos \beta dx$$

Integrando ambos miembros de la ecuación:

$$\int d\tau_{xz} = \int \rho g \cos \beta dx$$

$$\tau_{xz} = \rho g \cos \beta \int dx$$

$$\tau_{xz} = \rho g \cos \beta x + C_1 \quad (2)$$

Condición de borde: Para $x = 0$, $\tau_{xz} = 0$.

Al sustituir en la ecuación (2):

$$0 = \rho g \cos \beta(0) + C_1$$

$$C_1 = 0 \quad (3)$$

Al sustituir la ecuación (3) en la ecuación (2):

$$\tau_{xz} = \rho g \cos \beta x \quad (4)$$

La ecuación (4) es la distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento.

b) Distribución de velocidad.

Fluido Newtoniano.

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx} \quad (5)$$

Al sustituir la ecuación (5) en la ecuación (4):

$$-\mu \frac{dv_z}{dx} = \rho g \cos \beta x$$

Al separar las variables en la ecuación anterior:

$$dv_z = -\frac{\rho g \cos \beta}{\mu} x dx$$

Al integrar ambos miembros de la ecuación:

$$\int dv_z = -\int \frac{\rho g \cos \beta}{\mu} x dx$$

$$v_z = -\frac{\rho g \cos \beta}{\mu} \int x dx$$

La integración conduce a:

$$v_z = -\frac{\rho g \cos \beta}{\mu} \left(\frac{x^2}{2} \right) + C_2$$

$$v_z = -\frac{\rho g \cos \beta}{2\mu} x^2 + C_2 \quad (6)$$

Condición de borde: Para $x = \delta$, $v_z = 0$.

Al sustituir en la ecuación (6):

$$0 = -\frac{\rho g \cos \beta}{2\mu} (\delta)^2 + C_2$$

Al despejar C_2 en la ecuación anterior:

$$C_2 = \frac{\rho g \cos \beta}{2\mu} \delta^2 \quad (7)$$

Al sustituir la ecuación (7) en la ecuación (6):

$$v_z = -\frac{\rho g \cos \beta}{2\mu} x^2 + \frac{\rho g \cos \beta}{2\mu} \delta^2$$

$$v_z = \frac{\rho g \cos \beta}{2\mu} (\delta^2 - x^2)$$

Al multiplicar y dividir por δ^2 :

$$v_z = \frac{\rho g \cos \beta}{2\mu} (\delta^2 - x^2) \times \frac{\delta^2}{\delta^2}$$

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \left(\frac{\delta^2 - x^2}{\delta^2} \right)$$

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \left(\frac{\delta^2}{\delta^2} - \frac{x^2}{\delta^2} \right)$$

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \left(1 - \frac{x^2}{\delta^2} \right)$$

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \quad (8)$$

Distribución de velocidad parabólico.

c) Velocidad máxima.

La velocidad es máxima en $x = 0$.

$$v_{z,\max} = v_z(0)$$

Al sustituir $x = 0$ en la ecuación (8):

$$v_{z,\max} = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2 \mu} \left[1 - \left(\frac{0}{\delta} \right)^2 \right]$$

$$v_{z,\max} = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2 \mu} \tag{9}$$

d) Velocidad media.

Por definición:

$$\langle v_x \rangle = \frac{\text{Caudal}}{\text{Área de flujo}}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^w \int_0^\delta v_z \, dx \, dy}{\int_0^w \int_0^\delta dx \, dy} \tag{10}$$

Al sustituir la ecuación (8) en la ecuación (10):

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^w \int_0^\delta \left\{ \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2 \mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \right\} dx \, dy}{\int_0^w \int_0^\delta dx \, dy}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2 \mu} \int_0^w \int_0^\delta \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] dx \, dy}{\int_0^w \int_0^\delta dx \, dy}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2 \mu} \int_0^w \int_0^\delta \left(1 - \frac{x^2}{\delta^2} \right) dx \, dy}{\int_0^w \int_0^\delta dx \, dy}$$

Integrando con respecto a x .

$$\langle v_z \rangle = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta \int_0^W \left(x - \frac{1}{3\delta^2} x^3 \Big|_0^\delta \right) dy}{\int_0^W \left(x \Big|_0^\delta \right) dy}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta \int_0^W \left(\delta - \frac{\delta}{3} \right) dy}{\int_0^W \delta dy}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta \int_0^W \left(\frac{2}{3} \delta \right) dy}{\int_0^W \delta dy}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta \times \frac{2}{3} \int_0^W \delta dy}{\int_0^W \delta dy}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\rho g \delta^3 \cos \beta \int_0^W dy}{\delta \int_0^W dy}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\rho g \delta^3 \cos \beta (y \Big|_0^W)}{\delta (y \Big|_0^W)}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\rho g \delta^3 \cos \beta W}{\delta W}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\rho g \delta^3 \cos \beta (W - 0)}{\delta (W - 0)}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\rho g W \delta^3 \cos \beta}{3 \mu \delta W}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{3 \mu} \quad (11)$$

Comentario del autor:

En la deducción anterior, se omitió la simplificación de factores con el objeto de ilustrar que el caudal es $Q = \frac{\rho g W \delta^3 \cos \beta}{3 \mu}$ mientras que el área de flujo es $A = \delta W$. En la

práctica, se tiene el mismo procedimiento y resultado de calcular el caudal y el área de flujo de manera independiente.

e) Velocidad volumétrica de flujo (Caudal).

$$Q = \langle v_z \rangle A \quad (12)$$

Área perpendicular al flujo:

$$A = W \delta \quad (13)$$

Al sustituir las ecuaciones (11) y (13) en la ecuación (12):

$$Q = \left(\frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{3 \mu} \right) (W \delta)$$

$$Q = \frac{\rho g W \delta^3 \cos \beta}{3 \mu} \quad (14)$$

Flujo másico por unidad de ancho de la lámina ($\Gamma = \frac{\dot{m}}{W}$).

$$\rho = \frac{\dot{m}}{Q} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\dot{m}}{\rho} \quad (15)$$

Al sustituir la ecuación (15) en la ecuación (14):

$$\frac{\dot{m}}{\rho} = \frac{\rho g W \delta^3 \cos \beta}{3 \mu}$$

$$\frac{m}{W} = \frac{\rho^2 g \delta^3 \cos \beta}{3 \mu}$$

$$\Gamma = \frac{\rho^2 g \delta^3 \cos \beta}{3 \mu} \quad (16)$$

f) Espesor de la película.

Al despejar δ en la ecuación (11):

$$\delta^2 = \frac{3 \mu \langle v_z \rangle}{\rho g \cos \beta}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{3 \mu \langle v_z \rangle}{\rho g \cos \beta}} \quad (17)$$

Al despejar δ en la ecuación (14):

$$\delta^3 = \frac{3 \mu Q}{\rho g \cos \beta W}$$

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3 \mu Q}{\rho g \cos \beta W}} \quad (18)$$

Al despejar δ en la ecuación (16):

$$\delta^3 = \frac{3 \mu \Gamma}{\rho^2 g \cos \beta}$$

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3 \mu \Gamma}{\rho^2 g \cos \beta}} \quad (19)$$

g) Componente de la fuerza F del fluido sobre la superficie.

$$F_z(x) = \tau_{xz} A \quad (20)$$

De la ecuación (4):

$$\tau_{xz} = \rho g \cos \beta x \quad (4)$$

Área de contacto.

$$A = L W \quad (21)$$

Al sustituir las ecuaciones (4) y (21) en la ecuación (20):

$$F_z(x) = (\rho g \cos \beta x)(LW)$$

$$F_z(x) = \rho g LW \cos \beta x \quad (22)$$

Para la capa de fluido sobre la superficie $x = \delta$. Al evaluar la ecuación (22) en $x = \delta$:

$$F_z(\delta) = \rho g LW \cos \beta(\delta)$$

$$F_z(\delta) = \rho g \delta LW \cos \beta \quad (23)$$

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **Distribuciones de Velocidad en Flujo Laminar, Sistemas rectangulares**, perteneciente a las asignaturas **Fenómenos de Transporte y Mecánica de Fluidos**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

<http://www.tutoruniversitario.com/>

Si Usted requiere la resolución de ejercicios adicionales acerca de ésta u otras asignaturas, contáctenos a través de los siguientes medios:

- WhatsApp: +58-4249744352 (En forma directa o desde nuestra página web).
- E-mail: medinawj@gmail.com

Lista de asignaturas en las cuales podemos ayudarle:

Cálculo Diferencial.	Cálculo Integral.	Cálculo Vectorial.
Ecuaciones Diferenciales.	Trigonometría.	Matemáticas Aplicadas.
Matemáticas Financieras.	Álgebra Lineal.	Métodos Numéricos.
Estadística.	Física (Mecánica).	Física (Electricidad).
Mecánica Vectorial (Estática).	Química Inorgánica.	Fisicoquímica.
Termodinámica.	Termodinámica Química.	Mecánica de Fluidos.
Fenómenos de Transporte.	Transferencia de Calor.	Ingeniería Económica.