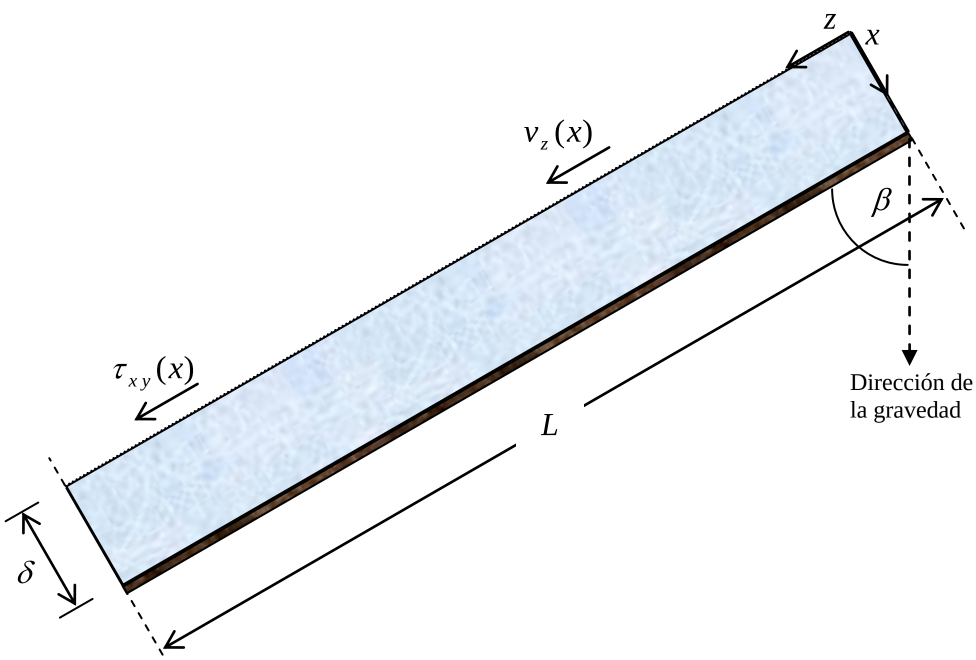
Sección 2.2 del Bird. Página 2-4.

Flujo de una película descendente. Consideremos una superficie plana inclinada. Estas películas se han estudiado en relación con torres de pared mojada, experiencias de evaporación y absorción de gases y aplicación de capas de pintura a rollos de papel. Se supone que la viscosidad y densidad del fluido son constantes y se considera una región de longitud L, suficientemente alejada de los extremos de la pared, de forma que las perturbaciones de la entrada y la salida no están incluidas en L; es decir, que en esta región el componente v_z de velocidad es independiente de z.



Determinar:

a) Distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento.

b) Distribución de velocidad.

c) Velocidad máxima.

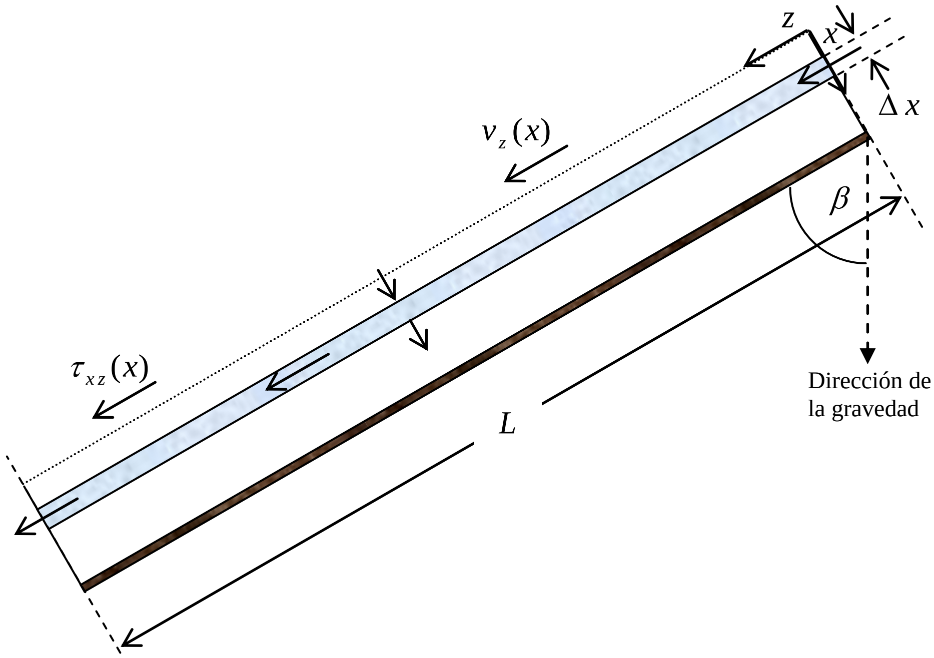
d) Velocidad media.

e) Velocidad volumétrica de flujo (Caudal).

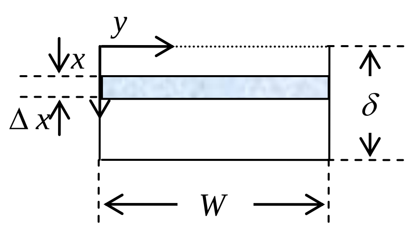
f) Espesor de la película.

g) Componente de la fuerza F del fluido sobre la superficie.

Solución.



a) Vista de frente:



Condiciones:

Estado estacionario.

Flujo laminar.

Fluido Newtoniano.

Propiedades del fluido constantes (ρ, μ).

Efectos de borde despreciables.

Flujo en dirección z ($v_x = 0$, $v_y = 0$, $v_z \neq 0$).

La velocidad varía en función de x: $v_z = v_z(x)$.

Balance de cantidad de movimiento.

$$LW\tau_{xz}\big|_{x} - LW\tau_{xz}\big|_{x+\Delta x} + LW\Delta x\rho g_z + (p_0 - p_L)W\Delta x = 0$$

Flujo sin diferencia de presión ($p_0 - p_L = 0$).

$$LW\tau_{xz}\big|_{x} - LW\tau_{xz}\big|_{x+\Delta x} + LW\Delta x\rho g_z = 0$$

g_z es la componente gravitacional en la dirección del flujo. En este caso $g_z = g\cos\beta$.

$$LW\tau_{xz}\big|_{x} - LW\tau_{xz}\big|_{x+\Delta x} + LW\Delta x\rho g\cos\beta = 0 \qquad (1)$$

Al simplificar $L\,W$:

$$\tau_{xz}\big|_{x} - \tau_{xz}\big|_{x+\Delta x} + \Delta x\rho g\cos\beta = 0$$

$$\tau_{xz}\big|_{x} - \tau_{xz}\big|_{x+\Delta x} = -\Delta x\rho g\cos\beta$$

$$\tau_{xz}\big|_{x+\Delta x} - \tau_{xz}\big|_{x} = \Delta x\rho g\cos\beta$$

$$\frac{\tau_{xz}\big|_{x+\Delta x} - \tau_{xz}\big|_{x}}{\Delta x} = \rho g\cos\beta$$

Tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$ en la ecuación anterior:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\tau_{xz}\big|_{x+\Delta x} - \tau_{xz}\big|_{x}}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}(\rho g\cos\beta)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\tau_{xz}\big|_{x+\Delta x} - \tau_{xz}\big|_{x}}{\Delta x}\right) = \rho g\cos\beta$$

Aplicando la definición de derivada:

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho g\cos\beta$$

Al separar variables en la ecuación anterior:

$$d\tau_{xz} = \rho g\cos\beta\,dx$$

Integrando ambos miembros de la ecuación:

$$\int d\tau_{xz} = \int \rho g\cos\beta\,dx$$

$$\tau_{xz} = \rho\, g \cos\beta \int dx$$

$$\tau_{xz} = \rho\, g \cos\beta\, x + C_1 \qquad (2)$$

Condición de borde: Para $x = 0$, $\tau_{xz} = 0$.

Al sustituir en la ecuación (2):

$$0 = \rho\, g \cos\beta (0) + C_1$$

$$C_1 = 0 \qquad (3)$$

Al sustituir la ecuación (3) en la ecuación (2):

$$\tau_{xz} = \rho\, g \cos\beta\, x \qquad (4)$$

La ecuación (4) es la distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento.

b) Distribución de velocidad.

Fluido Newtoniano.

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx} \qquad (5)$$

Al sustituir la ecuación (5) en la ecuación (4):

$$-\mu \frac{dv_z}{dx} = \rho\, g \cos\beta\, x$$

Al separar las variables en la ecuación anterior:

$$dv_z = -\frac{\rho\, g \cos\beta}{\mu}\, x\, dx$$

Al integrar ambos miembros de la ecuación:

$$\int dv_z = -\int \frac{\rho\, g \cos\beta}{\mu}\, x\, dx$$

$$v_z = -\frac{\rho\, g \cos\beta}{\mu} \int x\, dx$$

La integración conduce a:

$$v_z = -\frac{\rho\, g \cos\beta}{\mu}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C_2$$

$$v_z = -\frac{\rho\, g \cos\beta}{2\,\mu} x^2 + C_2 \tag{6}$$

Condición de borde: Para $x = \delta$, $v_z = 0$.

Al sustituir en la ecuación (6):

$$0 = -\frac{\rho\, g \cos\beta}{2\,\mu} (\delta)^2 + C_2$$

Al despejar C_2 en la ecuación anterior:

$$C_2 = \frac{\rho\, g \cos\beta}{2\,\mu} \delta^2 \tag{7}$$

Al sustituir la ecuación (7) en la ecuación (6):

$$v_z = -\frac{\rho\, g \cos\beta}{2\,\mu} x^2 + \frac{\rho\, g \cos\beta}{2\,\mu} \delta^2$$

$$v_z = \frac{\rho\, g \cos\beta}{2\,\mu} (\delta^2 - x^2)$$

Al multiplicar y dividir por δ^2:

$$v_z = \frac{\rho\, g \cos\beta}{2\,\mu} (\delta^2 - x^2) \times \frac{\delta^2}{\delta^2}$$

$$v_z = \frac{\rho\, g\, \delta^2 \cos\beta}{2\,\mu} \left(\frac{\delta^2 - x^2}{\delta^2} \right)$$

$$v_z = \frac{\rho\, g\, \delta^2 \cos\beta}{2\,\mu} \left(\frac{\delta^2}{\delta^2} - \frac{x^2}{\delta^2} \right)$$

$$v_z = \frac{\rho\, g\, \delta^2 \cos\beta}{2\,\mu} \left(1 - \frac{x^2}{\delta^2} \right)$$

$$v_z = \frac{\rho\, g\, \delta^2 \cos\beta}{2\,\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \tag{8}$$

Distribución de velocidad parabólico.

c) Velocidad máxima.

La velocidad es máxima en $x = 0$.

$$v_{z,\max} = v_z(0)$$

Al sustituir $x = 0$en la ecuación (8):

$$v_{z,máx} = \frac{\rho\, g\, \delta^2 \cos\beta}{2\,\mu}\left[1-\left(\frac{0}{\delta}\right)^2\right]$$

$$v_{z,máx} = \frac{\rho\, g\, \delta^2 \cos\beta}{2\,\mu} \tag{9}$$

d) Velocidad media.

Por definición:

$$< v_x > = \frac{\text{Caudal}}{\text{Área de flujo}}$$

$$< v_z > = \frac{\int_0^W\int_0^\delta v_z\, d\,x\, d\,y}{\int_0^W\int_0^\delta d\,x\, d\,y} \tag{10}$$

Al sustituir la ecuación (8) en la ecuación (10):

$$< v_z > = \frac{\int_0^W\int_0^\delta \left\{\frac{\rho\, g\, \delta^2 \cos\beta}{2\,\mu}\left[1-\left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right]\right\} d\,x\, d\,y}{\int_0^W\int_0^\delta d\,x\, d\,y}$$

$$< v_z > = \frac{\frac{\rho\, g\, \delta^2 \cos\beta}{2\,\mu}\int_0^W\int_0^\delta \left[1-\left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right] d\,x\, d\,y}{\int_0^W\int_0^\delta d\,x\, d\,y}$$

$$< v_z > = \frac{\frac{\rho\, g\, \delta^2 \cos\beta}{2\,\mu}\int_0^W\int_0^\delta \left(1-\frac{x^2}{\delta^2}\right) d\,x\, d\,y}{\int_0^W\int_0^\delta d\,x\, d\,y}$$

Integrando con respecto a *x*.

$$< v_z >= \frac{\dfrac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{2\mu}\displaystyle\int_0^W \left(x - \frac{1}{3\delta^2} x^3 \Big|_0^{\delta} \right) dy}{\displaystyle\int_0^W \left(x \Big|_0^{\delta} \right) dy}$$

$$< v_z >= \frac{\dfrac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{2\mu}\displaystyle\int_0^W \left(\delta - \frac{\delta}{3} \right) dy}{\displaystyle\int_0^W \delta \, dy}$$

$$< v_z >= \frac{\dfrac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{2\mu}\displaystyle\int_0^W (\tfrac{2}{3}\delta) \, dy}{\displaystyle\int_0^W \delta \, dy}$$

$$< v_z >= \frac{\dfrac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{2\mu} \times \dfrac{2}{3}\displaystyle\int_0^W \delta \, dy}{\displaystyle\int_0^W \delta \, dy}$$

$$< v_z >= \frac{\dfrac{\rho g \delta^3 \cos\beta}{3\mu}\displaystyle\int_0^W dy}{\delta \displaystyle\int_0^W dy}$$

$$< v_z >= \frac{\dfrac{\rho g \delta^3 \cos\beta}{3\mu} (y \Big|_0^W)}{\delta (y \Big|_0^W)}$$

$$< v_z >= \frac{\dfrac{\rho g \delta^3 \cos\beta}{3\mu} W}{\delta W}$$

$$< v_z >= \frac{\dfrac{\rho g \delta^3 \cos\beta}{3\mu} (W - 0)}{\delta (W - 0)}$$

$$< v_z >= \frac{\frac{\rho\, g\, W\, \delta^3 \cos\beta}{3\,\mu}}{\delta W}$$

$$< v_z >= \frac{\rho\, g\, \delta^2 \cos\beta}{3\,\mu} \tag{11}$$

Comentario del autor:

En la deducción anterior, se omitió la simplificación de factores con el objeto de ilustrar que el caudal es $Q = \frac{\rho\, g\, W\, \delta^3 \cos\beta}{3\,\mu}$ mientras que el área de flujo es A = δ W. En la práctica, se tiene el mismo procedimiento y resultado de calcular el caudal y el área de flujo de manera independiente.

e) Velocidad volumétrica de flujo (Caudal).

$$Q =< v_z > A \tag{12}$$

Área perpendicular al flujo:

$$A = W\,\delta \tag{13}$$

Al sustituir las ecuaciones (11) y (13) en la ecuación (12):

$$Q = \left(\frac{\rho\, g\, \delta^2 \cos\beta}{3\,\mu}\right)(W\,\delta)$$

$$Q = \frac{\rho\, g\, W\, \delta^3 \cos\beta}{3\,\mu} \tag{14}$$

Flujo másico por unidad de ancho de la lámina ($\Gamma = \frac{\dot{m}}{W}$).

$$\rho = \frac{\dot{m}}{Q} \qquad \Rightarrow \qquad Q = \frac{\dot{m}}{\rho} \tag{15}$$

Al sustituir la ecuación (15) en la ecuación (14):

$$\frac{\dot{m}}{\rho} = \frac{\rho\, g\, W\, \delta^3 \cos\beta}{3\,\mu}$$

$$\frac{\dot{m}}{W}=\frac{\rho^2 g\,\delta^3\cos\beta}{3\mu}$$

$$\Gamma=\frac{\rho^2 g\,\delta^3\cos\beta}{3\mu} \tag{16}$$

f) Espesor de la película.

Al despejar δ en la ecuación (11):

$$\delta^2=\frac{3\mu<v_z>}{\rho\,g\cos\beta}$$

$$\delta=\sqrt{\frac{3\mu<v_z>}{\rho\,g\cos\beta}} \tag{17}$$

Al despejar δ en la ecuación (14):

$$\delta^3=\frac{3\mu Q}{\rho\,g\cos\beta W}$$

$$\delta=\sqrt[3]{\frac{3\mu Q}{\rho\,g\cos\beta W}} \tag{18}$$

Al despejar δ en la ecuación (16):

$$\delta^3=\frac{3\mu\Gamma}{\rho^2 g\cos\beta}$$

$$\delta=\sqrt[3]{\frac{3\mu\Gamma}{\rho^2 g\cos\beta}} \tag{19}$$

g) Componente de la fuerza F del fluido sobre la superficie.

$$F_z(x)=\tau_{xz}\,A \tag{20}$$

De la ecuación (4):

$$\tau_{xz}=\rho\,g\cos\beta\,x \tag{4}$$

Área de contacto.

$$A=L\,W \tag{21}$$

Al sustituir las ecuaciones (4) y (21) en la ecuación (20):

$$F_z(x) = (\rho\, g \cos\beta\, x)(LW)$$

$$F_z(x) = \rho\, g\, LW \cos\beta\, x \qquad (22)$$

Para la capa de fluido sobre la superficie $x = \delta$. Al evaluar la ecuación (22) en $x = \delta$:

$$F_z(\delta) = \rho\, g\, LW \cos\beta\, (\delta)$$

$$F_z(\delta) = \rho\, g\, \delta\, LW \cos\beta \qquad (23)$$