

Ejemplo b). Capítulo 20 del Rainville. Página 339.

Resolver la ecuación $y'' + (x-1)^2 y' - 4(x-1)y = 0$ alrededor del punto ordinario $x = 1$.

Solución.

Sea $v = x - 1$, luego la ecuación diferencial puede ser escrita como:

$$y'' + v^2 y' - 4v y = 0$$

Determinación de puntos singulares.

Los puntos singulares se obtienen anulando el coeficiente de y'' (la segunda derivada).

$$1 = 0$$

$x =$ No existe.

No existen puntos singulares, por lo tanto todos son puntos ordinarios.

Puesto que $x = 1$ es un punto ordinario, se puede escribir la solución de la ecuación diferencial en la forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

$$y(v) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v^n$$

Las derivadas involucradas son:

Primera derivada: $y'(v) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n v^{n-1}$

Segunda derivada: $y''(v) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n v^{n-2}$

Obsérvese que el límite inferior de la sumatoria para la primera derivada se inicia en $n = 1$, pues en caso de iniciar en $n = 0$, el primer término sería nulo. De igual manera, el límite inferior de la sumatoria para la segunda derivada se inicia en $n = 2$, pues en caso de iniciar en $n = 0$, el primer término sería nulo al igual que el segundo término ($n = 1$).

Siendo la ecuación diferencial $y'' + v^2 y' - 4v y = 0$, se tiene que al sustituir tanto $y(v)$ como $y'(v)$ y $y''(v)$ en la misma, obtenemos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n v^{n-2} + v^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n v^{n-1} - 4v \sum_{n=0}^{\infty} a_n v^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n v^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n v^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n v^{n+1} = 0$$

Para igualar los exponentes se recurre a un cambio de variable. En la primera sumatoria hacemos $n - 2 = k$ (con el objeto que aparezca como exponente k). En la segunda sumatoria y en la tercera sumatoria hacemos $n + 1 = k$, apareciendo como exponente k también.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+2-1)a_{k+2} v^k + \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)a_{k-1} v^k - \sum_{k=1}^{\infty} 4a_{k-1} v^k = 0$$

Obsérvese que en la primera sumatoria, el límite inferior cambia, pues $n - 2 = k$, y si n parte de 2 para esta sumatoria, entonces k partirá de cero, mientras que para la segunda y tercera sumatoria, cuando $n = 1$ y $n = 0$, los valores que toma k son 2 y 1 por ser $n + 1 = k$, por lo tanto la segunda y tercera sumatoria tendrán como límite inferior 2 y 1 respectivamente.

Seguidamente se efectúan las simplificaciones a que haya lugar:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} v^k + \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)a_{k-1} v^k - \sum_{k=1}^{\infty} 4a_{k-1} v^k = 0$$

Puesto que las sumatorias deben ser semejantes, se desarrolla en la primera sumatoria el término correspondiente a $k = 0$ y $k = 1$ y en la tercera el término correspondiente a $k = 1$. De esta manera, la primera sumatoria tendrá como límite inferior 2 y la tercera sumatoria tendrá como límite inferior 2, al igual que la segunda. Es importante mencionar que se deben desarrollar los términos en las sumas con el objeto que todas tengan como límite inferior el mismo valor, y ese valor será el máximo entre los límites inferiores.

$$2.1.a_2 + 3.2.a_3 v + \sum_{k=2}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} v^k + \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)a_{k-1} v^k - 4a_0 v - \sum_{k=1}^{\infty} 4a_{k-1} v^k = 0$$

Al agrupar las sumatorias:

$$2.1.a_2 + 3.2.a_3 v - 4a_0 v + \sum_{k=2}^{\infty} [(k+2)(k+1)a_{k+2} + (k-1)a_{k-1} - 4a_{k-1}] v^k = 0$$

$$2.1.a_2 + (3.2.a_3 - 4a_0) v + \sum_{k=2}^{\infty} \{ (k+2)(k+1)a_{k+2} + [(k-1) - 4]a_{k-1} \} v^k = 0$$

$$2.1.a_2 + (3.2.a_3 - 4a_0)v + \sum_{k=2}^{\infty} [(k+2)(k+1)a_{k+2} + (k-1-4)a_{k-1}]v^k = 0$$

$$2.1.a_2 + (3.2.a_3 - 4a_0)v + \sum_{k=2}^{\infty} [(k+2)(k+1)a_{k+2} + (k-5)a_{k-1}]v^k = 0$$

Todos los términos del miembro izquierdo de la ecuación deben ser nulos, por lo tanto:

$$2.1.a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 0$$

$$3.2.a_3 - 4a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 = -\frac{4a_0}{3.2} \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{(-4)}{3.2}a_0$$

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + (k-5)a_{k-1} = 0$$

Para obtener la relación de recurrencia se despeja el término que contenga el máximo subíndice:

$$a_{k+2} = -\frac{k-5}{(k+2)(k+1)}a_{k-1} \quad k \geq 2 \quad \text{Relación de recurrencia.}$$

Por tratarse de una ecuación diferencial de segundo orden, se deben obtener dos soluciones linealmente independientes. Una primera solución es obtenida al considerar los coeficientes que dependen de a_0 , mientras que la segunda solución corresponde a los coeficientes que dependen de a_1 , o viceversa.

$$k = 2: a_{2+2} = -\frac{(2)-5}{[(2)+2][(2)+1]}a_{2-1} \Rightarrow a_4 = \frac{1}{4}a_1$$

$$k = 3: a_{3+2} = -\frac{(3)-5}{[(3)+2][(3)+1]}a_{3-1} \Rightarrow a_5 = -\frac{(-2)}{5.4}a_2 \Rightarrow a_5 = -\frac{(-2)}{5.4}(0) \Rightarrow a_5 = 0$$

$$k = 4: a_{4+2} = -\frac{(4)-5}{[(4)+2][(4)+1]}a_{4-1} \Rightarrow a_6 = -\frac{(-1)}{6.5}a_3 \Rightarrow a_6 = -\frac{(-1)}{6.5} \left[\frac{(-4)}{3.2}a_0 \right] \Rightarrow$$

$$a_6 = \frac{(-4)(-1)}{3.6.2.5}a_0$$

$$k = 5: a_{5+2} = -\frac{(5)-5}{[(5)+2][(5)+1]}a_{5-1} \Rightarrow a_7 = -\frac{0}{7.6}a_4 \Rightarrow a_7 = 0$$

$$k = 6: a_{6+2} = -\frac{(6)-5}{[(6)+2][(6)+1]} a_{6-1} \Rightarrow a_8 = -\frac{1}{8.7} a_5 \Rightarrow a_8 = -\frac{1}{8.7} (0) \Rightarrow a_8 = 0$$

$$k = 7: a_{7+2} = -\frac{(7)-5}{[(7)+2][(7)+1]} a_{7-1} \Rightarrow a_9 = -\frac{2}{9.8} a_6 \Rightarrow a_9 = -\frac{2}{9.8} \left[\frac{(-4)(-1)}{3.6.2.5} a_0 \right] \Rightarrow$$

$$a_9 = -\frac{(-4)(-1).2}{3.6.9.2.5.8} a_0$$

$$k = 8: a_{8+2} = -\frac{(8)-5}{[(8)+2][(8)+1]} a_{8-1} \Rightarrow a_{10} = -\frac{3}{10.9} a_7 \Rightarrow a_{10} = -\frac{3}{10.9} (0) \Rightarrow a_{10} = 0$$

$$k = 9: a_{9+2} = -\frac{(9)-5}{[(9)+2][(9)+1]} a_{9-1} \Rightarrow a_{11} = -\frac{4}{11.10} a_8 \Rightarrow a_{11} = -\frac{4}{11.10} (0) \Rightarrow a_{11} = 0$$

Podemos discriminar los términos de la forma siguiente:

Los que dependen de a_0

$$a_3 = \frac{(-4)}{3.2} a_0$$

$$a_6 = \frac{(-4)(-1)}{3.6.2.5} a_0$$

$$a_9 = -\frac{(-4)(-1).2}{3.6.9.2.5.8} a_0$$

Los que dependen de a_1

$$a_4 = -\frac{(-3)}{4.3} a_1$$

$$a_7 = 0$$

$$a_{10} = 0$$

Debe observarse que existe alternancia en el signo de los coeficientes.

Para los subíndices y términos de productos se aplican progresiones aritméticas, sabiendo que el término n -ésimo para cualquier progresión aritmética está dado por la ecuación $c_k = c_0 + (k-1)r$, donde c_0 es el primer término y r es la razón.

Para los términos dependientes de a_0 :

Componente	Primer término	Razón	Término n -ésimo del componente
Subíndice	3	3	$3k$
Numerador	-4	3	$3k - 7$
Denominador	3	3	$3k$
Denominador	2	3	$3k - 1$

El término n -ésimo de los coeficientes de la suma es:

$$a_{3k} = (-1)^k \frac{(-4)(-1).2.....(3k-7)}{3.6.9.....3k.2.5.8.....(3k-1)} a_0$$

Dado que tenemos producto de números 2.5.8.... tanto en el numerador como en el denominador, es conveniente proceder a simplificarlos. Para ello observamos el último factor en cada caso. En el numerador es $3k-7$, mientras que para el denominador es $3k-1$. De estos elementos el que alcanza un valor superior es $3k-1$ (denominador), lo cual significa que en su recorrido, pasa por $3k-7$. Se escriben sus términos previos en el denominador hasta alcanzar $3k-7$.

$$a_{3k} = (-1)^k \frac{(-4)(-1).2.....(3k-7)}{3.1.3.2.3.3.....3k.2.5.8.....(3k-7)(3k-4)(3k-1)} a_0$$

La simplificación conduce a:

$$a_{3k} = (-1)^k \frac{(-4)(-1)}{3.3.3.....3.1.2.3.....k.(3k-4)(3k-1)} a_0$$

$$a_{3k} = (-1)^k \frac{4}{3^k \cdot k! \cdot (3k-4)(3k-1)} a_0 \quad k \geq 1 \quad \text{Término enésimo.}$$

Primera solución de la ecuación diferencial.

$$y_1(v) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v^n$$

$$y_1(v) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k} v^{3k}$$

La ecuación del término enésimo está definida para $k \geq 1$, por lo tanto, se desarrolla el primer término de la sumatoria:

$$y_1(v) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{3k} v^{3k}$$

Al sustituir el término enésimo en la ecuación anterior:

$$y_1(v) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^k \frac{4}{3^k \cdot k! \cdot (3k-4)(3k-1)} a_0 \right] v^{3k}$$

Ahora, se verifica si el término a_0 es obtenido a partir de la sumatoria, con el objeto de insertarlo en la misma. Vemos que efectivamente, cuando $k=0$, el argumento de la sumatoria se reduce a a_0 . La solución entonces se puede escribir como:

$$y_1(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k \frac{4}{3^k \cdot k! \cdot (3k-4)(3k-1)} a_0 \right] v^{3k}$$

$$y_1(v) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 4v^{3k}}{3^k \cdot k! \cdot (3k-4)(3k-1)}$$

$$y_1(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 4(x-1)^{3k}}{3^k \cdot k! \cdot (3k-4)(3k-1)}$$

Para los términos dependientes de a_1 :

El término enésimo de los coeficientes de la suma es:

$$a_{3k+1} = 0 \quad k \geq 2 \quad \text{Término enésimo.}$$

Segunda solución de la ecuación diferencial.

$$y_2(v) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v^n$$

$$y_2(v) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k+1} v^{3k+1}$$

La ecuación del término enésimo está definida para $k \geq 2$, por lo tanto, se desarrolla el primer y segundo términos de la sumatoria:

$$y_2(v) = a_1 v + a_4 v^3 + \sum_{k=2}^{\infty} a_{3k+1} v^{3k+1}$$

Al sustituir la constante conocida (a_4) y el término enésimo en la ecuación anterior:

$$y_2(v) = a_1 v + \left(\frac{1}{4} a_1\right) v^4 + \sum_{k=2}^{\infty} (0) v^{3k+1}$$

$$y_2(v) = a_1 v + \frac{1}{4} a_1 v^4$$

$$y_2(v) = a_1 \left(v + \frac{1}{4} v^4 \right)$$

$$y_2(x) = a_1 \left[(x-1) + \frac{1}{4} (x-1)^4 \right]$$

Solución general de la ecuación diferencial:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

$$y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 4(x-1)^{3k}}{3^k \cdot k! \cdot (3k-4)(3k-1)} + a_1 \left[(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^4 \right]$$

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **Solución de Ecuaciones Diferenciales en Serie de Potencias, Puntos Ordinarios**, perteneciente a la asignatura **Ecuaciones Diferenciales**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

<http://www.tutoruniversitario.com/>

Si Usted requiere la resolución de ejercicios adicionales acerca de ésta u otras asignaturas, contáctenos a través de los siguientes medios:

- WhatsApp: +58-4249744352 (En forma directa o desde nuestra página web).
- E-mail: medinawj@gmail.com

Lista de asignaturas en las cuales podemos ayudarle:

Cálculo Diferencial.	Cálculo Integral.	Cálculo Vectorial.
Ecuaciones Diferenciales.	Trigonometría.	Matemáticas Aplicadas.
Matemáticas Financieras.	Álgebra Lineal.	Métodos Numéricos.
Estadística.	Física (Mecánica).	Física (Electricidad).
Mecánica Vectorial (Estática).	Química Inorgánica.	Fisicoquímica.
Termodinámica.	Termodinámica Química.	Mecánica de Fluidos.
Fenómenos de Transporte.	Transferencia de Calor.	Ingeniería Económica.