Ejemplo 6. Capítulo 6 del Zill. Segunda Edición. Página 219.

Dada la ecuación diferencial $y''-2xy=0$, encuentre dos soluciones en serie de potencias en torno al punto ordinario $x = 0$ que sean linealmente independientes.

Solución.

Determinación de puntos singulares.

Los puntos singulares se obtienen anulando el coeficiente de y'' (la segunda derivada).

1 = 0

x = No existe.

No existen puntos singulares, por lo tanto todos son puntos ordinarios.

Puesto que $x = 0$ es un punto ordinario, se puede escribir la solución de la ecuación diferencial en la forma:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Las derivadas involucradas son:

Primera derivada: $$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^{n-1}$$

Segunda derivada: $$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n x^{n-2}$$

Obsérvese que el límite inferior de la sumatoria para la primera derivada se inicia en $n=1$, pues en caso de iniciar en $n=0$, el primer término sería nulo. De igual manera, el límite inferior de la sumatoria para la segunda derivada se inicia en $n=2$, pues en caso de iniciar en $n=0$, el primer término sería nulo al igual que el segundo término ($n=1$).

Siendo la ecuación diferencial $y''-2xy=0$, se tiene que al sustituir tanto $y(x)$ como $y'(x)$ y $y''(x)$ en la misma, obtenemos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2\,a_n x^{n+1} = 0$$

Para igualar los exponentes se recurre a un cambio de variable. En la primera sumatoria hacemos $n - 2 = k$ (con el objeto que aparezca como exponente k) y en la segunda sumatoria hacemos $n + 1 = k$, apareciendo como exponente k también.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+2-1)\,a_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty}2\,a_{k-1}x^k = 0$$

Obsérvese que en la segunda sumatoria, el límite inferior cambia, pues $n - 2 = k$, y si n parte de 2 para esta sumatoria, entonces k partirá de cero, mientras que para la segunda sumatoria, cuando $n = 0$, el valor que toma k es 1 por ser $n + 1 = k$, por lo tanto la segunda sumatoria tendrá como límite inferior 1 en lugar de 0.

Seguidamente se efectúan las simplificaciones a que haya lugar:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)\,a_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty}2\,a_{k-1}x^k = 0$$

Puesto que las sumatorias deben ser semejantes, se desarrolla en la primera sumatoria el término correspondiente a $k = 0$. De esta manera, la primera sumatoria tendrá como límite inferior 1, al igual que la segunda. Es importante mencionar que se deben desarrollar los términos en las sumas con el objeto que todas tengan como límite inferior el mismo valor, y ese valor será el máximo entre los límites inferiores.

$$2.1.a_2 + \sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)\,a_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty}2\,a_{k-1}x^k = 0$$

Al agrupar las sumatorias:

$$2.1.a_2 + \sum_{k=1}^{\infty}[(k+2)(k+1)\,a_{k+2} - 2\,a_{k-1}]\,x^k = 0$$

Todos los términos del miembro izquierdo de la ecuación deben ser nulos, por lo tanto:

$$2.1a_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_2 = 0$$

$$(k+2)(k+1)\,a_{k+2} - 2\,a_{k-1} = 0$$

Para obtener la relación de recurrencia se despeja el término que contenga el máximo subíndice:

$a_{k+2} = \dfrac{2}{(k+2)(k+1)} a_{k-1} \qquad k \geq 1$ Relación de recurrencia.

Por tratarse de una ecuación diferencial de segundo orden, se deben obtener dos soluciones linealmente independientes. Una primera solución es obtenida al considerar los coeficientes que dependen de a_0, mientras que la segunda solución corresponde a los coeficientes que dependen de a_1, o viceversa.

$k = 1$: $a_{1+2} = \dfrac{2}{[(1)+2][(1)+1]} a_{1-1} \Rightarrow a_3 = \dfrac{2}{3.2} a_0$

$k = 2$: $a_{2+2} = \dfrac{2}{[(2)+2][(2)+1]} a_{2-1} \Rightarrow a_4 = \dfrac{2}{4.3} a_1$

$k = 3$: $a_{3+2} = \dfrac{2}{[(3)+2][(3)+1]} a_{3-1} \Rightarrow a_5 = \dfrac{2}{5.4} a_2 \Rightarrow a_5 = \dfrac{2}{5.4}(0) \Rightarrow a_5 = 0$

$k = 4$: $a_{4+2} = \dfrac{2}{[(4)+2][(4)+1]} a_{4-1} \Rightarrow a_6 = \dfrac{2}{6.5} a_3 \Rightarrow a_6 = \dfrac{2}{6.5}\left(\dfrac{2}{3.2} a_0\right) \Rightarrow a_6 = \dfrac{2^2}{3.6.2.5} a_0$

$k = 5$: $a_{5+2} = \dfrac{2}{[(5)+2][(5)+1]} a_{5-1} \Rightarrow a_7 = \dfrac{2}{7.6} a_4 \Rightarrow a_7 = \dfrac{2}{7.6}\left(\dfrac{2}{4.3} a_1\right) \Rightarrow a_7 = \dfrac{2^2}{4.7.3.6} a_1$

$k = 6$: $a_{6+2} = \dfrac{2}{[(6)+2][(6)+1]} a_{6-1} \Rightarrow a_8 = \dfrac{2}{8.7} a_5 \Rightarrow a_8 = \dfrac{2}{8.7}(0) \Rightarrow a_8 = 0$

Podemos discriminar los términos de la forma siguiente:

Los que dependen de a_0	Los que dependen de a_1
$a_3 = \dfrac{2}{3.2} a_0$	$a_4 = \dfrac{2}{4.3} a_1$
$a_6 = \dfrac{2^2}{3.6.2.5} a_0$	$a_7 = \dfrac{2^2}{4.7.3.6} a_1$

Debe observarse que no existe alternancia en el signo de los coeficientes.

Para los subíndices y términos de productos se aplican progresiones aritméticas, sabiendo que el término enésimo para cualquier progresión aritmética está dado por la ecuación $c_k = c_0 + (k-1)r$, donde c_0 es el primer término y r es la razón.

Para los términos dependientes de a_0 :

Componente	Primer término	Razón	Término enésimo del componente
Subíndice	3	3	$3k$
Exponente del 2	1	1	k
Denominador	3	3	$3k$
Denominador	2	3	$3k-1$

El término enésimo de los coeficientes de la suma es:

$$a_{3k} = \frac{2^k}{3.6.9.12.....(3k).2.5.8.11.....(3k-1)} a_0$$

$$a_{3k} = \frac{2^k}{3.1.3.2.3.3.3.4.....3.k.2.5.8.11.....(3k-1)} a_0$$

$$a_{3k} = \frac{2^k}{3.3.3.....3.1.2.3.....k.2.5.8.11.....(3k-1)} a_0$$

$$a_{3k} = \frac{2^k}{3^k.k!.2.5.8.11.....(3k-1)} a_0$$

$$a_{3k} = \frac{(\frac{2}{3})^k}{k!.2.5.8.11.....(3k-1)} a_0 \qquad k \geq 1 \qquad \text{Término enésimo.}$$

Primera solución de la ecuación diferencial.

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k} x^{3k}$$

La ecuación del término enésimo está definida para $k \geq 1$, por lo tanto, se desarrolla el primer término de la sumatoria:

$$y_1(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{3k} x^{3k}$$

$$y_1(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(\frac{2}{3})^k}{k!.2.5.8.11.....(3k-1)} a_0 \right] x^{3k}$$

$$y_1(x) = a_0 + a_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\frac{2}{3})^k x^{3k}}{k!.2.5.8.11.....(3k-1)}$$

$$y_1(x) = a_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\frac{2}{3})^k x^{3k}}{k!.2.5.8.11.....(3k-1)} \right]$$

Para los términos dependientes de a_1:

Componente	Primer término	Razón	Término enésimo del componente
Subíndice	4	3	$3k+1$
Exponente del 2	1	1	k
Denominador	4	3	$3k+1$
Denominador	3	3	$3k$

El término enésimo de los coeficientes de la suma es:

$$a_{3k+1} = \frac{2^k}{4.7.10.13.....(3k+1).3.6.9.12.....(3k)} a_1$$

$$a_{3k+1} = \frac{2^k}{4.7.10.13.....(3k+1).3.1.3.2.3.3.3.4.....3.k} a_1$$

$$a_{3k+1} = \frac{2^k}{4.7.10.13.....(3k+1).3.3.3.....3.1.2.3.....k} a_1$$

$$a_{3k+1} = \frac{2^k}{4.7.10.13.....(3k+1).3^k.k!} a_1$$

$$a_{3k+1} = \frac{(\frac{2}{3})^k}{4.7.10.13.....(3k+1).k!} a_1 \quad k \geq 1$$ Término enésimo.

Segunda solución de la ecuación diferencial.

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k+1} x^{3k+1}$$

La ecuación del término enésimo está definida para $k \geq 1$, por lo tanto, se desarrolla el primer término de la sumatoria:

$$y_2(x) = a_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} a_{3k+1} x^{3k+1}$$

$$y_2(x) = a_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(\frac{2}{3})^k}{4.7.10.13.....(3k+1).k!} a_1 \right] x^{3k+1}$$

$$y_2(x) = a_1 x + a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\frac{2}{3})^k x^{3k+1}}{4.7.10.13.....(3k+1).k!}$$

$$y_2(x) = a_1 \left[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\frac{2}{3})^k x^{3k+1}}{4.7.10.13.....(3k+1).k!} \right]$$

Solución general de la ecuación diferencial:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

$$y = a_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\frac{2}{3})^k x^{3k}}{k!.2.5.8.11.....(3k-1)} \right] + a_1 \left[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\frac{2}{3})^k x^{3k+1}}{4.7.10.13.....(3k+1).k!} \right]$$