Ejemplo a). Capítulo 20 del Rainville. Página 336.

Encontrar la solución general de tal manera que sea válida cerca del origen $(1-x^2)\,y''-6\,x\,y'-4\,y=0$.

Solución.

La ecuación diferencial planteada es equivalente a $(-x^2+1)\,y''-6\,x\,y'-4\,y=0$

Determinación de puntos singulares.

Los puntos singulares se obtienen anulando el coeficiente de y'' (la segunda derivada).

$-x^2+1=0$

$x^2=1$

$x=-1$

$x=1$

Los únicos puntos singulares son $x = -1$ y $x = 1$, por lo tanto todos los demás puntos son ordinarios.

Puesto que $x = 0$ es un punto ordinario, se puede escribir la solución de la ecuación diferencial en la forma:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$$

Las derivadas involucradas son:

Primera derivada: $$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,x^{n-1}$$

Segunda derivada: $$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n\,x^{n-2}$$

Obsérvese que el límite inferior de la sumatoria para la primera derivada se inicia en $n=1$, pues en caso de iniciar en $n=0$, el primer término sería nulo. De igual manera, el límite inferior de la sumatoria para la segunda derivada se inicia en $n=2$, pues en caso de iniciar en $n=0$, el primer término sería nulo al igual que el segundo término ($n=1$).

Siendo la ecuación diferencial $(-x^2+1)\,y''-6\,x\,y'-4\,y=0$, se tiene que al sustituir tanto $y(x)$ como $y'(x)$ y $y''(x)$ en la misma, obtenemos:

$$(-x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 6x\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^{n-1} - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} -n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 6n\,a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n = 0$$

Para igualar los exponentes se recurre a un cambio de variable. En la primera sumatoria hacemos $n = k$ (con el objeto que aparezca como exponente k) así como en la tercera y la cuarta sumatoria y en la segunda sumatoria hacemos $n - 2 = k$, apareciendo como exponente k también.

$$\sum_{k=2}^{\infty} -k(k-1)a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+2-1)a_{k+2} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 6k\,a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} 4a_k x^k = 0$$

Obsérvese que en la segunda sumatoria, el límite inferior cambia, pues $n - 2 = k$, y si n parte de 2 para esta sumatoria, entonces k partirá de cero, mientras que para la primera, tercera y cuarta sumatoria, cuando $n = 2$, $n = 1$ y $n = 0$, los valores que toma k son 2, 1 y 0 por ser $n = k$, por lo tanto la primera, tercera y cuarta sumatoria tendrán como límite inferior 2, 1 y 0 respectivamente, esto es, conservan su límite inferior.

Seguidamente se efectúan las simplificaciones a que haya lugar:

$$\sum_{k=2}^{\infty} -k(k-1)a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 6k\,a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} 4a_k x^k = 0$$

Puesto que las sumatorias deben ser semejantes, se desarrolla en la segunda sumatoria el término correspondiente a $k = 0$ y a $k = 1$, al igual que en la cuarta, mientras que en la tercera sólo se desarrolla el término correspondiente a $k = 1$. De esta manera, la segunda, tercera y cuarta sumatoria tendrán como límite inferior 2, al igual que la primera. Es importante mencionar que se deben desarrollar los términos en las sumas con el objeto que todas tengan como límite inferior el mismo valor, y ese valor será el máximo entre los límites inferiores.

$$\sum_{k=2}^{\infty} -k(k-1)a_k x^k + 2.1a_2 + 3.2a_3 x + \sum_{k=2}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k - 6a_1 x - \sum_{k=2}^{\infty} 6k\,a_k x^k + (-4a_0) + (-4a_1 x) - \sum_{k=2}^{\infty} 4a_k x^k$$

Al agrupar las sumatorias:

$$2.1a_2+3.2a_3x+(-10a_1)x+(-4a_0)+\sum_{k=2}^{\infty}[-k(k-1)a_k+(k+2)(k+1)a_{k+2}-6k\,a_k-4a_k]x^k=0$$

$$2.1a_2+3.2a_3x+(-6a_1x)+(-4a_0)+\sum_{k=2}^{\infty}\{[-k(k-1)-6k-4]a_k+(k+2)(k+1)a_{k+2}\}x^k=0$$

$$[2.1a_2+(-4a_0)]+[(3.2a_3+(-10a_1)x]+\sum_{k=2}^{\infty}\{[-k(k-1)-6k-4]a_k+(k+2)(k+1)a_{k+2}\}x^k=0$$

Todos los términos del miembro izquierdo de la ecuación deben ser nulos, por lo tanto:

$$2.1a_2+(-4a_0)=0 \quad\Rightarrow\quad a_2=-\frac{-4a_0}{2.1} \quad\Rightarrow\quad a_2=\frac{4}{2}a_0$$

$$3.2a_3+(-10a_1)=0 \quad\Rightarrow\quad a_3=-\frac{-10a_1}{3.2} \quad\Rightarrow\quad a_3=\frac{5}{3}a_1$$

$$[-k(k-1)-6k-4]a_k+(k+2)(k+1)a_{k+2}=0$$

Para obtener la relación de recurrencia se despeja el término que contenga el máximo subíndice:

$$a_{k+2}=-\frac{-k(k-1)-6k-4}{(k+2)(k+1)}a_k$$

Al desarrollar la ecuación anterior:

$$a_{k+2}=-\frac{-k^2+k-6k-4}{(k+2)(k+1)}a_k$$

$$a_{k+2}=-\frac{-k^2-5k-4}{(k+2)(k+1)}a_k$$

La factorización conduce a la siguiente expresión:

$$a_{k+2}=-\frac{-(k+1)(k+4)}{(k+2)(k+1)}a_k$$

La cual al ser simplificada da como resultado:

$$a_{k+2}=\frac{k+4}{k+2}a_k \qquad k\geq 2 \qquad \text{Relación de recurrencia.}$$

Por tratarse de una ecuación diferencial de segundo orden, se deben obtener dos soluciones linealmente independientes. Una primera solución es obtenida al considerar los valores de k pares, mientras que la segunda solución corresponde a los valores de k impares, o viceversa.

Para valores de k pares:

$k = 2$: $a_{2+2} = \frac{(2)+4}{(2)+2} a_2 \Rightarrow a_4 = \frac{6}{4} a_2 \Rightarrow a_4 = \frac{6}{4}\left(\frac{4}{2} a_0\right) \Rightarrow a_4 = \frac{4.6}{2.4} a_0$

$k = 4$: $a_{4+2} = \frac{(4)+4}{(4)+2} a_4 \Rightarrow a_6 = \frac{8}{6} a_4 \Rightarrow a_6 = \frac{8}{6}\left(\frac{4.6}{2.4} a_0\right) \Rightarrow a_6 = \frac{4.6.8}{2.4.6} a_0$

En resumen tenemos:

$$a_2 = \frac{4}{2} a_0, \quad a_4 = \frac{4.6}{2.4} a_0, \quad a_6 = \frac{4.6.8}{2.4.6} a_0$$

Determinación del término enésimo usando inspección.

Debe observarse que no existe alternancia en el signo de los coeficientes.

Para los subíndices y términos de productos se aplica inspección. En primer lugar tenemos el subíndice de cada término, que se trata de números pares, por lo tanto queda expresado como 2 k, y los términos correspondientes serán a_{2k}. Para el producto de números pares en el numerador, observamos que los factores comienzan en 4, van de dos en dos, hasta llegar al valor del subíndice del término más 2, por lo tanto dicho producto puede ser expresado como 4.6.8…..(2 k + 2). Finalmente, para el producto de números pares en el denominador, observamos que los factores comienzan en 2, van de dos en dos, hasta llegar al valor del subíndice del término, por lo tanto dicho producto puede ser expresado como 2.4.6…..(2 k).

Se tiene entonces:

$$a_{2k} = \frac{4.6.8.....(2k+2)}{2.4.6.....(2k)} a_0$$

Debido a que tenemos producto de números pares tanto en el numerador como en el denominador, es conveniente proceder a simplificarlos. Para ellos observamos el último factor en cada caso. Para el numerador es 2 k + 2, mientras que para el denominador es 2 k.

De estos elementos el que alcanza un valor superior es 2 k + 2 (numerador), lo cual significa que en su recorrido, pasa por 2 k. Se escriben sus términos previos en el numerador hasta alcanzar 2 k.

$$a_{2k} = \frac{4.6.8.....(2k).(2k+2)}{2.4.6.....(2k)} a_0$$

La simplificación de términos conduce a:

$$a_{2k} = \frac{2k+2}{2} a_0$$

$$a_{2k} = \frac{2(k+1)}{2} a_0$$

$a_{2k} = (k+1)\,a_0$ $\qquad k \geq 1 \qquad$ Término enésimo.

Determinación del término enésimo usando progresiones.

Debe observarse que no existe alternancia en el signo de los coeficientes.

Para los subíndices y términos de productos se aplican progresiones aritméticas, sabiendo que el término enésimo para cualquier progresión aritmética está dado por la ecuación $c_k = c_0 + (k-1)\,r$, donde c_0 es el primer término y r es la razón.

Componente	Primer término	Razón	Término enésimo del componente
Subíndice	2	2	2 k
Numerador	4	2	2 k + 2
Denominador	2	2	2 k

El término enésimo de los coeficientes de la suma es:

$$a_{2k} = \frac{4.6.8.....(2k+2)}{2.4.6.....(2k)} a_0$$

El cual puede ser reducido a la forma:

$a_{2k} = (k+1)\,a_0$ $\qquad k \geq 1 \qquad$ Término enésimo.

Primera solución de la ecuación diferencial.

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$$

La ecuación del término enésimo está definida para $k \geq 1$, por lo tanto, se desarrolla el primer término de la sumatoria:

$$y_1(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$$

Al sustituir el término enésimo en la ecuación anterior:

$$y_1(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)\, a_0]\, x^{2k}$$

Ahora, se verifica si el término a_0 es obtenido a partir de la sumatoria, con el objeto de insertarlo en la misma. Vemos que efectivamente, cuando $k = 0$, el argumento de la sumatoria se reduce a a_0. La solución entonces se puede escribir como:

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)\, a_0]\, x^{2k}$$

$$y_1(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, x^{2k}$$

Para valores de k impares:

k = 3: $a_{3+2} = \dfrac{(3)+4}{(3)+2} a_3 \Rightarrow a_5 = \dfrac{7}{5} a_3 \Rightarrow a_5 = \dfrac{7}{5}\left(\dfrac{5}{3} a_1\right) \Rightarrow a_5 = \dfrac{5.7}{3.5} a_1$

k = 5: $a_{3+2} = \dfrac{(5)+4}{(5)+2} a_5 \Rightarrow a_7 = \dfrac{9}{7} a_5 \Rightarrow a_7 = \dfrac{9}{7}\left(\dfrac{5.7}{3.5} a_1\right) \Rightarrow a_7 = \dfrac{5.7.9}{3.5.7} a_1$

En resumen tenemos:

$$a_3 = \frac{5}{3} a_1,\ \ a_5 = \frac{5.7}{3.5} a_1,\ \ a_7 = \frac{5.7.9}{3.5.7} a_1$$

Determinación del término enésimo usando inspección.

Debe observarse que no existe alternancia en el signo de los coeficientes.

Para los subíndices y términos de productos se aplica inspección. En primer lugar tenemos el subíndice de cada término, que se trata de números impares, por lo tanto queda expresado como 2 k + 1, y los términos correspondientes serán a_{2k+1}. Para el producto de números impares en el numerador, observamos que los factores comienzan en 5, van de dos en dos, hasta llegar al valor del subíndice del término más 2, por lo tanto dicho producto puede ser expresado como 5.7.9…..[(2 k + 1) + 2] = 5.7.9…..(2 k + 3). Finalmente, para el producto de números pares en el denominador, observamos que los factores comienzan en 3, van de dos en dos, hasta llegar al valor del subíndice del término, por lo tanto dicho producto puede ser expresado como 3.5.7…..(2 k + 1). Se tiene entonces:

$$a_{2k+1} = \frac{5.7.9.....(2k+3)}{3.5.7.....(2k+1)} a_1$$

Dado que tenemos producto de números impares tanto en el numerador como en el denominador, es conveniente proceder a simplificarlos. Para ello observamos el último factor en cada caso. Para los números impares, en el numerador es 2 k + 3, mientras que para el denominador es 2 k + 1. De estos elementos el que alcanza un valor superior es 2 k + 3 (numerador), lo cual significa que en su recorrido, pasa por 2 k + 1. Se escriben sus términos previos en el denominador hasta alcanzar 2 k + 1.

$$a_{2k+1} = \frac{5.7.9.....(2k+1).(2k+3)}{3.5.7.....(2k+1)} a_1$$

La simplificación conduce a:

$$a_{2k+1} = \frac{2k+3}{3} a_1 \qquad k \geq 1 \qquad \text{Término enésimo.}$$

Determinación del término enésimo usando progresiones.

Debe observarse que no existe alternancia en el signo de los coeficientes.

Para los subíndices, exponentes y términos de productos se aplican progresiones aritméticas, sabiendo que el término enésimo para cualquier progresión aritmética está dado por la ecuación $c_k = c_0 + (k-1)r$, donde c_0 es el primer término y r es la razón.

Componente	Primer término	Razón	Término enésimo del componente
Subíndice	3	2	2 k + 1
Numerador (impar)	5	2	2 k + 3
Denominador	3	2	2 k + 1

(impar)			

El término enésimo de los coeficientes de la suma es:

$$a_{2k+1}=\frac{5.7.9.....(2k+3)}{3.5.7.....(2k+1)}a_1$$

El cual puede ser reducido a la forma:

$$a_{2k+1}=\frac{2k+3}{3}a_1 \qquad\qquad k\geq 1 \qquad\qquad \text{Término enésimo.}$$

Segunda solución de la ecuación diferencial.

$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

$$y_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}$$

La ecuación del término enésimo está definida para $k\geq 1$, por lo tanto, se desarrolla el primer término de la sumatoria:

$$y_2(x)=a_1x+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}$$

Al sustituir el término enésimo en la sumatoria:

$$y_2(x)=a_1x+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k+3}{3}a_1\right)x^{2k+1}$$

Ahora, se verifica si el término a_1x es obtenido a partir de la sumatoria, con el objeto de insertarlo en la misma. Vemos que efectivamente, cuando $k=0$, el argumento de la sumatoria se reduce a a_1x. La solución entonces se puede escribir como:

$$y_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2k+3}{3}a_1\right)x^{2k+1}$$

$$y_2(x)=\tfrac{1}{3}a_1\sum_{k=0}^{\infty}(2k+3)\,x^{2k+1}$$

Solución general de la ecuación diferencial:

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x)$$

$$y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+3)\, x^{2k+1}}{3}$$; válida para $|x| < 1$.

Comentario del autor: Es evidente que Rainville cometió un error al escribir la ecuación (8) de la página 339 como equivalente de la ecuación (7) de la página 338. En la ecuación (8) escribió $\frac{3}{2k+3}$ en lugar de $\frac{2k+3}{3}$.