Ejemplo 7. Capítulo 6 del Zill. Página 220. Problema Resuelto 5 del Ayres. Página 202.

Dada la ecuación diferencial $(x^2+1)\,y''+x\,y'-y=0$, encuentre dos soluciones en serie de potencias en torno al punto ordinario $x = 0$ que sean linealmente independientes.

Solución.

Determinación de puntos singulares.

Los puntos singulares se obtienen anulando el coeficiente de y'' (la segunda derivada).

$x^2+1=0$

x = No existe.

No existen puntos singulares, por lo tanto todos son puntos ordinarios.

Puesto que $x = 0$ es un punto ordinario, se puede escribir la solución de la ecuación diferencial en la forma:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Las derivadas involucradas son:

Primera derivada: $y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^{n-1}$

Segunda derivada: $y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n x^{n-2}$

Obsérvese que el límite inferior de la sumatoria para la primera derivada se inicia en $n=1$, pues en caso de iniciar en $n=0$, el primer término sería nulo. De igual manera, el límite inferior de la sumatoria para la segunda derivada se inicia en $n=2$, pues en caso de iniciar en $n=0$, el primer término sería nulo al igual que el segundo término ($n=1$).

Siendo la ecuación diferencial $(x^2+1)\,y''+x\,y'-y=0$, se tiene que al sustituir tanto $y(x)$ como $y'(x)$ y $y''(x)$ en la misma, obtenemos:

$$(x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Para igualar los exponentes se recurre a un cambio de variable. En la primera sumatoria hacemos $n = k$ (con el objeto que aparezca como exponente k) así como en la tercera y la cuarta sumatoria y en la segunda sumatoria hacemos $n - 2 = k$, apareciendo como exponente k también.

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+2-1)a_{k+2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k\,a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

Obsérvese que en la segunda sumatoria, el límite inferior cambia, pues $n - 2 = k$, y si n parte de 2 para esta sumatoria, entonces k partirá de cero, mientras que para la primera, tercera y cuarta sumatoria, cuando $n = 2$, $n = 1$ y $n = 0$, los valores que toma k son 2, 1 y 0 por ser $n = k$, por lo tanto la primera, tercera y cuarta sumatoria tendrán como límite inferior 2, 1 y 0 respectivamente, esto es, conservan su límite inferior.

Seguidamente se efectúan las simplificaciones a que haya lugar:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k\,a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

Puesto que las sumatorias deben ser semejantes, se desarrolla en la segunda sumatoria el término correspondiente a $k = 0$ y a $k = 1$, al igual que en la cuarta, mientras que en la tercera sólo se desarrolla el término correspondiente a $k = 1$. De esta manera, la segunda, tercera y cuarta sumatoria tendrán como límite inferior 2, al igual que la primera. Es importante mencionar que se deben desarrollar los términos en las sumas con el objeto que todas tengan como límite inferior el mismo valor, y ese valor será el máximo entre los límites inferiores.

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k + 2.1a_2 + 3.2a_3 x + \sum_{k=2}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k + a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} k\,a_k x^k - a_0 - a_1 x - \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = 0$$

Al agrupar las sumatorias:

$$2.1a_2 + 3.2a_3 x - a_0 + \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2} + k\,a_k - a_k] x^k = 0$$

$$2.1a_2 + 3.2a_3 x - a_0 + \sum_{k=2}^{\infty}\{[k(k-1)+k-1]a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2}\}x^k = 0$$

$$(2.1a_2 - a_0) + 3.2a_3 x + \sum_{k=2}^{\infty}\{[k(k-1)+k-1]a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2}\}x^k = 0$$

Todos los términos del miembro izquierdo de la ecuación deben ser nulos, por lo tanto:

$$2.1a_2 - a_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_2 = -\frac{-a_0}{2.1} \qquad \Rightarrow \qquad a_2 = -\frac{(-1)}{2}a_0$$

$$3.2a_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_3 = 0$$

$$[k(k-1)+k-1]a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2} = 0$$

Para obtener la relación de recurrencia se despeja el término que contenga el máximo subíndice:

$$a_{k+2} = -\frac{k(k-1)+k-1}{(k+2)(k+1)}a_k$$

Al desarrollar la ecuación anterior:

$$a_{k+2} = -\frac{k^2-k+k-1}{(k+2)(k+1)}a_k$$

$$a_{k+2} = -\frac{k^2-1}{(k+2)(k+1)}a_k$$

La factorización conduce a la siguiente expresión:

$$a_{k+2} = -\frac{(k+1)(k-1)}{(k+2)(k+1)}a_k$$

La cual al ser simplificada da como resultado:

$$a_{k+2} = -\frac{k-1}{k+2}a_k \qquad k \geq 2 \qquad \text{Relación de recurrencia.}$$

Por tratarse de una ecuación diferencial de segundo orden, se deben obtener dos soluciones linealmente independientes. Una primera solución es obtenida al considerar los valores de k pares, mientras que la segunda solución corresponde a los valores de k impares, o viceversa.

Para valores de k pares:

$k = 2$: $a_{2+2} = -\dfrac{(2)-1}{(2)+2} a_2 \quad \Rightarrow \quad a_4 = -\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{(-1)}{2} a_0\right) \quad \Rightarrow \quad a_4 = \dfrac{(-1).1}{2.4} a_0$

$k = 4$: $a_{4+2} = -\dfrac{(4)-1}{(4)+2} a_4 \quad \Rightarrow \quad a_6 = -\dfrac{3}{6}\left(\dfrac{(-1).1}{2.4} a_0\right) \quad \Rightarrow \quad a_6 = -\dfrac{(-1).1.3}{2.4.6} a_0$

$k = 6$: $a_{6+2} = -\dfrac{(6)-1}{(6)+2} a_6 \quad \Rightarrow \quad a_8 = -\dfrac{5}{8}\left(-\dfrac{(-1).1.3}{2.4.6} a_0\right) \quad \Rightarrow \quad a_8 = \dfrac{(-1).1.3.5}{2.4.6.8} a_0$

En resumen tenemos:

$$a_2 = -\frac{(-1)}{2} a_0,\ a_4 = \frac{(-1).1}{2.4} a_0,\ a_6 = -\frac{(-1).1.3}{2.4.6} a_0,\ a_8 = \frac{(-1).1.3.5}{2.4.6.8} a_0$$

Determinación del término enésimo usando inspección.

Para determinar el término enésimo usando inspección, debe observarse la alternancia en el signo de los coeficientes. La existencia de la alternancia implica que los términos de la sumatoria deben estar multiplicados por un factor de la forma $(-1)^k$ ó $(-1)^{k+1}$.

Para los subíndices y términos de productos se aplica inspección. En primer lugar tenemos el subíndice de cada término, que se trata de números pares, por lo tanto queda expresado como 2 k, y los términos correspondientes serán a_{2k}. Para los productos en el numerador, observamos que los factores comienzan en –1, van de dos en dos, hasta llegar al valor del subíndice del término menos 3, por lo tanto dicho producto puede ser expresado como (–1).1.3.5….(2 k – 3). Finalmente, para los productos en el denominador, observamos que los factores comienzan en 2, van de dos en dos, hasta llegar al valor del subíndice del término, por lo tanto dicho producto puede ser expresado como 2.4.6…..(2 k). Se tiene entonces:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{(-1).1.3.5.....(2k-3)}{2.4.6.8.....(2k)} a_0$$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{(-1).1.3.5.....(2k-3)}{2.(2.2).(2.3).(2.4).....(2k)} a_0$$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{(-1).1.3.5.....(2k-3)}{(2.1).(2.2).(2.3).(2.4).....(2k)} a_0$$

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{(-1).1.3.5.....(2k-3)}{2^k.1.2.3.4.....(k)}a_0$$

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{(-1).1.3.5.....(2k-3)}{2^k.k!}a_0$$

$$a_{2k}=(-1)^{k-1}\frac{1.3.5.....(2k-3)}{2^k.k!}a_0 \qquad k\geq 2 \qquad \text{Término enésimo.}$$

Determinación del término enésimo usando progresiones.

Para determinar el término enésimo, debe observarse la alternancia en el signo de los coeficientes. La existencia de la alternancia implica que los términos de la sumatoria deben estar multiplicados por un factor de la forma $(-1)^k$ ó $(-1)^{k+1}$.

Para los subíndices y términos de productos se aplican progresiones aritméticas, sabiendo que el término enésimo para cualquier progresión aritmética está dado por la ecuación $c_k=c_0+(k-1)r$, donde c_0 es el primer término y r es la razón.

Componente	Primer término	Razón	Término enésimo del componente
Subíndice	2	2	$2k$
Numerador	–1	2	$2k-3$
Denominador	2	2	$2k$

El término enésimo de los coeficientes de la suma es:

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{(-1).1.3.5.....(2k-3)}{2.4.6.8.....(2k)}a_0$$

El cual puede ser reducido a la forma:

$$a_{2k}=(-1)^{k-1}\frac{1.3.5.....(2k-3)}{2^k.k!}a_0 \qquad k\geq 2 \qquad \text{Término enésimo.}$$

Primera solución de la ecuación diferencial.

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{2k}$$

La ecuación del término enésimo está definida para $k \geq 2$, por lo tanto, se desarrolla el primer y segundo términos de la sumatoria:

$$y_1(x) = a_0 + a_2 x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$$

Al sustituir la constante conocida (a_2) y el término enésimo en la ecuación anterior:

$$y_1(x) = a_0 + (\tfrac{1}{2} a_0) x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \left[(-1)^{k-1} \frac{1.3.5.....(2k-3)}{2^k.k!} a_0 \right] x^{2k}$$

$$y_1(x) = a_0 + \tfrac{1}{2} a_0 x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \left[(-1)^{k-1} \frac{1.3.5.....(2k-3)}{2^k.k!} a_0 \right] x^{2k}$$

$$y_1(x) = a_0 + \tfrac{1}{2} a_0 x^2 + a_0 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}.1.3.5.....(2k-3)\, x^{2k}}{2^k.k!}$$

$$y_1(x) = a_0 \left[1 + \tfrac{1}{2} x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}.1.3.5.....(2k-3)\, x^{2k}}{2^k.k!} \right]$$

Para valores de k impares:

$k = 3$: $a_{3+2} = -\dfrac{(3)-1}{(3)+2} a_3 \quad \Rightarrow \quad a_5 = -\dfrac{2}{5}(0) \quad \Rightarrow \quad a_5 = 0$

$k = 5$: $a_{5+2} = -\dfrac{(5)-1}{(5)+2} a_5 \quad \Rightarrow \quad a_7 = -\dfrac{4}{7}(0) \quad \Rightarrow \quad a_7 = 0$

$a_{2k+1} = 0 \qquad k \geq 2 \qquad$ Término enésimo.

Segunda solución de la ecuación diferencial.

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

La ecuación del término enésimo está definida para $k \geq 2$, por lo tanto, se desarrolla el primer y segundo términos de la sumatoria:

$$y_2(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \sum_{k=2}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

Al sustituir la constante conocida (a_3) y el término enésimo en la ecuación anterior:

$$y_2(x) = a_1 x + (0)x^3 + \sum_{k=2}^{\infty} (0)\, x^{2k+1}$$

$$y_2(x) = a_1 x$$

Solución general de la ecuación diferencial:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

$$y = a_0 \left[1 + \tfrac{1}{2} x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}.1.3.5.....(2k-3)\, x^{2k}}{2^k.k!} \right] + a_1 x$$

En este ejemplo se ha ilustrado la situación en la cual una de las soluciones está truncada debido a que a partir de un término dado (el segundo en este caso) el valor de los coeficientes en los términos de la sumatoria es nulo. Se trata de un caso particular y no existe una forma generalizada de predecir tal comportamiento a partir de la ecuación diferencial. No obstante, siempre que la relación de recurrencia tenga en el numerador una forma $k - p$, donde p es un entero positivo, entonces la solución correspondiente de la ecuación diferencial ha de estar truncada. Es posible que las dos soluciones estén truncadas.

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **Solución de Ecuaciones Diferenciales en Serie de Potencias, Puntos Ordinarios,** perteneciente a la asignatura **Ecuaciones Diferenciales**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

http://www.tutoruniversitario.com/

Si Usted requiere la resolución de ejercicios adicionales acerca de ésta u otras asignaturas, contáctenos a través de los siguientes medios:

- WhatsApp: +58-4249744352 (En forma directa o desde nuestra página web).
- E-mail: medinawj@gmail.com

Lista de asignaturas en las cuales podemos ayudarle:

Cálculo Diferencial.	Cálculo Integral.	Cálculo Vectorial.
Ecuaciones Diferenciales.	Trigonometría.	Matemáticas Aplicadas.
Matemáticas Financieras.	Álgebra Lineal.	Métodos Numéricos.
Estadística.	Física (Mecánica).	Física (Electricidad).
Mecánica Vectorial (Estática).	Química Inorgánica.	Fisicoquímica.
Termodinámica.	Termodinámica Química.	Mecánica de Fluidos.
Fenómenos de Transporte.	Transferencia de Calor.	Ingeniería Económica.