Ejemplo 1. Sección 17 del Makarenko. Página 147.

Hallar la solución de la ecuación $y''-xy'-2y=0$ en forma de serie de potencias.

Solución.

Determinación de puntos singulares.

Los puntos singulares se obtienen anulando el coeficiente de y'' (la segunda derivada).

1 = 0

x = No existe.

No existen puntos singulares, por lo tanto todos son puntos ordinarios.

Puesto que $x = 0$ es un punto ordinario, se puede escribir la solución de la ecuación diferencial en la forma:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Las derivadas involucradas son:

Primera derivada: $y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^{n-1}$

Segunda derivada: $y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n x^{n-2}$

Obsérvese que el límite inferior de la sumatoria para la primera derivada se inicia en $n=1$, pues en caso de iniciar en $n=0$, el primer término sería nulo. De igual manera, el límite inferior de la sumatoria para la segunda derivada se inicia en $n=2$, pues en caso de iniciar en $n=0$, el primer término sería nulo al igual que el segundo término ($n=1$).

Siendo la ecuación diferencial $y''-xy'-2y=0$, se tiene que al sustituir tanto $y(x)$ como $y'(x)$ y $y''(x)$ en la misma, obtenemos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^{n} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0$$

Para igualar los exponentes se recurre a un cambio de variable. En la primera sumatoria hacemos $n - 2 = k$ (con el objeto que aparezca como exponente k) y en la segunda y tercera sumatoria hacemos $n = k$, apareciendo como exponente k también.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+2-1)\,a_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty}k\,a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty}2\,a_k x^k = 0$$

Obsérvese que en la primera sumatoria, el límite inferior cambia, pues $n - 2 = k$, y si n parte de 2 para esta sumatoria, entonces k partirá de cero, mientras que para la segunda y tercera suma, cuando $n = 1$ y $n = 0$, los valores que toma k son 1 y 0 por ser $n = k$, por lo tanto la segunda y tercera sumatoria tendrán como límite inferior 1 y 0 respectivamente, esto es, conservan su límite inferior.

Seguidamente se efectúan las simplificaciones a que haya lugar:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)\,a_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty}k\,a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty}2\,a_k x^k = 0$$

Puesto que las sumatorias deben ser semejantes, se desarrolla en la primera sumatoria el término correspondiente a $k = 0$, al igual que en la tercera. De esta manera, la primera y tercera sumatoria tendrán como límite inferior uno, al igual que la segunda. Es importante mencionar que se deben desarrollar los términos en las sumas con el objeto que todas tengan como límite inferior el mismo valor, y ese valor será el máximo entre los límites inferiores.

$$2.1a_2 + \sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)\,a_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty}k\,a_k x^k - 2\,a_0 - \sum_{k=1}^{\infty}2\,a_k x^k = 0$$

Al agrupar las sumatorias:

$$2.1a_2 - 2\,a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[(k+2)(k+1)\,a_{k+2} - k\,a_k - 2\,a_k\,]x^k = 0$$

$$2.1a_2 - 2\,a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[(k+2)(k+1)\,a_{k+2} - (k+2)\,a_k\,]x^k = 0$$

Todos los términos del miembro izquierdo de la ecuación deben ser nulos, por lo tanto:

$$2.1a_2 - 2\,a_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_2 = \frac{2\,a_0}{2.1} \qquad \Rightarrow \qquad a_2 = a_0$$

$(k+2)(k+1)a_{k+2}-(k+2)a_k=0$

Para obtener la relación de recurrencia se despeja el término que contenga el máximo subíndice:

$$a_{k+2}=\frac{(k+2)}{(k+2)(k+1)}a_k$$

Al simplificar la expresión anterior:

$a_{k+2}=\dfrac{1}{k+1}a_k$ $\qquad k\geq 1$ $\qquad$ Relación de recurrencia.

Por tratarse de una ecuación diferencial de segundo orden, se deben obtener dos soluciones linealmente independientes. Una primera solución es obtenida al considerar los valores de *k* pares, mientras que la segunda solución corresponde a los valores de *k* impares, o viceversa.

Para valores de k pares:

k = 2: $a_{2+2}=\dfrac{1}{(2)+1}a_2 \quad \Rightarrow \quad a_4=\dfrac{1}{3}a_2 \quad \Rightarrow \quad a_4=\dfrac{1}{3}a_0$

k = 4: $a_{4+2}=\dfrac{1}{(4)+1}a_4 \quad \Rightarrow \quad a_6=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{3}a_0\right) \quad \Rightarrow \quad a_6=\dfrac{1}{3.5}a_0$

k = 6: $a_{6+2}=\dfrac{1}{(6)+1}a_4 \quad \Rightarrow \quad a_8=\dfrac{1}{7}\left(\dfrac{1}{3.5}a_0\right) \quad \Rightarrow \quad a_8=\dfrac{1}{3.5.7}a_0$

En resumen tenemos:

$$a_4=\frac{1}{3}a_0\,,\ a_6=\frac{1}{3.5}a_0\,,\ a_8=\frac{1}{3.5.7}a_0$$

Determinación del término enésimo usando inspección.

Debe observarse que no existe alternancia en el signo de los coeficientes.

Para los subíndices y términos de productos se aplica inspección. En primer lugar tenemos el subíndice de cada término, que se trata de números pares, por lo tanto queda expresado como 2 *k*, y los términos correspondientes serán a_{2k}. Para los productos, observamos que los factores comienzan en 3, van de dos en dos, hasta llegar al valor del subíndice del término menos 1, por lo tanto dicho producto puede ser expresado como 3.5.7…..(2 k – 1). Se tiene entonces:

$$a_{2k} = \frac{1}{3.5.7.....(2k-1)} a_0 \qquad k \geq 2 \qquad \text{Término enésimo.}$$

Determinación del término enésimo usando progresiones.

Para los subíndices y términos de productos se aplican progresiones aritméticas, sabiendo que el término enésimo para cualquier progresión aritmética está dado por la ecuación $c_k = c_0 + (k-1)r$, donde c_0 es el primer término y r es la razón.

Componente	Primer término	Razón	Término enésimo del componente
Subíndice	4	2	2 k + 2
Denominador	3	2	2 k + 1

El término enésimo de los coeficientes de la suma es:

$$a_{2k+2} = \frac{1}{3.5.7.....(2k+1)} a_0$$

El cual puede ser reducido a la forma:

$$a_{2k} = \frac{1}{3.5.7.....(2k-1)} a_0 \qquad k \geq 2 \qquad \text{Término enésimo.}$$

Primera solución de la ecuación diferencial.

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$$

La ecuación del término enésimo está definida para $k \geq 2$, por lo tanto, se desarrolla el primer y segundo términos de la sumatoria:

$$y_1(x) = a_0 + a_2 x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$$

Al sustituir la constante conocida (a_2) y el término enésimo en la ecuación anterior:

$$y_1(x) = a_0 + (a_0)\, x^2 + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{1}{3.5.7.....(2k-1)}\, a_0\right] x^{2k}$$

$$y_1(x) = a_0 + a_0 x^2 + a_0 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{2k}}{3.5.7.....(2k-1)}$$

$$y_1(x) = a_0\left[1 + x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{2k}}{3.5.7.....(2k-1)}\right]$$

Para valores de k impares:

$k = 1$: $a_{1+2} = \dfrac{1}{(1)+1} a_1 \quad \Rightarrow \quad a_3 = \dfrac{1}{2} a_1$

$k = 3$: $a_{3+2} = \dfrac{1}{(3)+1} a_3 \quad \Rightarrow \quad a_5 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2} a_1\right) \quad \Rightarrow \quad a_5 = \dfrac{1}{2.4} a_1$

$k = 5$: $a_{5+2} = \dfrac{1}{(5)+1} a_3 \quad \Rightarrow \quad a_7 = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2.4} a_1\right) \quad \Rightarrow \quad a_7 = \dfrac{1}{2.4.6} a_1$

En resumen tenemos:

$$a_3 = \frac{1}{2} a_1,\; a_5 = \frac{1}{2.4} a_1,\; a_7 = \frac{1}{2.4.6} a_1$$

Determinación del término enésimo usando inspección.

Para los subíndices y términos de productos se aplica inspección. En primer lugar tenemos el subíndice de cada término, que se trata de números impares, por lo tanto queda expresado como 2 k + 1, y los términos correspondientes serán a_{2k+1}. Para los productos, observamos que los factores comienzan en 2, van de dos en dos, hasta llegar al valor del subíndice del término menos 1, por lo tanto dicho producto puede ser expresado como 2.4.6…..(2 k + 1 – 1) = 2.4.6…..(2 k). Se tiene entonces:

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2.4.6.....(2k)} a_1$$

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2.1.2.2.2.3.....2k} a_1$$

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2.2.2.....2.1.2.3.....k} a_1$$

$$a_{2k+1}=\frac{1}{2^k.k!}a_1 \qquad k\geq 1 \qquad \text{Término enésimo.}$$

Determinación del término enésimo usando progresiones.

Para determinar el término enésimo, debe observarse la alternancia en el signo de los coeficientes. La existencia de la alternancia implica que los términos de la sumatoria deben estar multiplicados por un factor de la forma $(-1)^k$ ó $(-1)^{k+1}$.

Para los subíndices y términos de productos se aplican progresiones aritméticas, sabiendo que el término enésimo para cualquier progresión aritmética está dado por la ecuación $c_k=c_0+(k-1)r$, donde c_0 es el primer término y r es la razón.

Componente	Primer término	Razón	Término enésimo del componente
Subíndice	3	2	$2k+1$
Denominador	2	2	$2k$

El término enésimo de los coeficientes de la suma es:

$$a_{2k+1}=\frac{1}{2.4.6.....(2k)}a_1$$

El cual puede ser reducido a la forma:

$$a_{2k+1}=\frac{1}{2^k.k!}a_1 \qquad k\geq 1 \qquad \text{Término enésimo.}$$

Segunda solución de la ecuación diferencial.

$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

$$y_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}$$

La ecuación del término enésimo está definida para $k\geq 1$, por lo tanto, se desarrolla el primer término de la sumatoria:

$$y_2(x)=a_1x+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}$$

Al sustituir el término enésimo en la sumatoria:

$$y_2(x)=a_1x+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k.k!}a_1\right)x^{2k+1}$$

Ahora, se verifica si el término a_1x es obtenido a partir de la sumatoria, con el objeto de insertarlo en la misma. Vemos que efectivamente, cuando $k=0$, el argumento de la sumatoria se reduce a a_1x. La solución entonces se puede escribir como:

$$y_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k.k!}a_1\right)x^{2k+1}$$

$$y_2(x)=a_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2^k.k!}$$

$$y_2(x)=a_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}.x}{2^k.k!}$$

$$y_2(x)=a_1x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2^k.k!}$$

$$y_2(x)=a_1x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x^2)^k}{2^k.k!}$$

$$y_2(x)=a_1x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x^2)^k}{2^k}\times\frac{1}{k!}$$

$$y_2(x)=a_1x\sum_{k=0}^{\infty}(\tfrac{1}{2}x^2)^k\times\frac{1}{k!}$$

$$y_2(x)=a_1x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}x^2)^k}{k!}$$

Es sabido que $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$, luego:

$$y_2(x)=a_1x\,e^{\frac{1}{2}x^2}$$

Solución general de la ecuación diferencial:

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x)$$

$$y = a_0\left[1 + x^2 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^{2k}}{3.5.7.....(2k-1)}\right] + a_1 x e^{\frac{1}{2}x^2}$$

En este ejemplo se ha ilustrado la situación en la cual una de las soluciones se reduce a una función conocida. Se trata de un caso particular y no existe una forma generalizada de predecir tal comportamiento a partir de la ecuación diferencial. Es posible que las dos soluciones puedan ser reducidas a un algún tipo de función conocida.