Ejemplo 115 del Filippis. Página 290. Ejemplo 6.3 del Cortés. Octava Edición. Página 168.

Calcular $\int \frac{d\,x}{\sqrt{(4x-x^2)^3}}$.

Solución.

Puesto que aparece la variable lineal en el radical, se aplica completación de cuadrados.

$4x - x^2 = -x^2 + 4x$

$4x - x^2 = -(x^2 - 4x)$

$4x - x^2 = -(x^2 - 4x + 4 - 4)$

$4x - x^2 = -[(x-2)^2 - 4]$

$4x - x^2 = -(x-2)^2 + 4$

$4x - x^2 = 4 - (x-2)^2$

La integral planteada se escribe en la forma siguiente:

$$\int \frac{d\,x}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = \int \frac{d\,x}{\sqrt{[4-(x-2)^2]^3}}$$

El integrando tiene la forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, se hace la sustitución:

$x - 2 = 2 \operatorname{sen} \theta$

$d\,x = 2 \cos \theta \, d\,\theta$

Al sustituir x y $d\,x$ en la integral:

$$\int \frac{d\,x}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = \int \frac{2\cos\theta\, d\,\theta}{\sqrt{[4-(2\operatorname{sen}\theta)^2]^3}}$$

$$\int \frac{d\,x}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = 2\int \frac{\cos\theta\, d\,\theta}{\sqrt{(4-4\operatorname{sen}^2\theta)^3}}$$

$$\int \frac{d\,x}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = 2\int \frac{\cos\theta\, d\,\theta}{\sqrt{[4(1-\operatorname{sen}^2\theta)]^3}}$$

$$\int \frac{d\,x}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = 2\int \frac{\cos\theta\, d\,\theta}{\sqrt{(4\cos^2\theta)^3}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = 2\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{64\cos^6\theta}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = 2\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{8\cos^3\theta}$$

Al simplificar los valores numéricos y el factor $\cos\theta$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = \tfrac{1}{4}\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = \tfrac{1}{4}\int \sec^2\theta\, d\theta$$

La integración conduce a:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = \tfrac{1}{4}\tan\theta + C \quad \text{(Ecuación 1).}$$

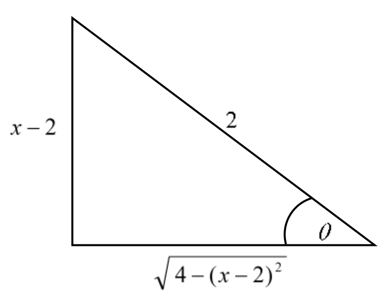
Para volver a la variable original se debe definir tan θ en función de x.

Partiendo de la sustitución trigonométrica realizada:

$x - 2 = 2$ sen θ

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x-2}{2} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

Se construye un triángulo rectángulo cuyo cateto opuesto es $x - 2$ e hipotenusa es 2. El lado faltante, se determina con la aplicación del teorema de Pitágoras.



Observe que la magnitud del lado faltante coincide con la expresión $\sqrt{4-(x-2)^2}$ que se encuentra en el integrando.

A partir del triángulo obtenido, se define tan θ.

$$\tan\theta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$$

$$\tan\theta = \frac{x-2}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$$

Al sustituir en la Ecuación 1:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = \tfrac{1}{4}\left[\frac{x-2}{\sqrt{4-(x-2)^2}}\right] + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = \frac{x-2}{4\sqrt{4-(x-2)^2}}$$