

**Ejemplo 115 del Filippis. Página 290. Ejemplo 6.3 del Cortés. Octava Edición. Página 168.**

Calcular  $\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}}$ .

Solución.

Puesto que aparece la variable lineal en el radical, se aplica completación de cuadrados.

$$4x - x^2 = -x^2 + 4x$$

$$4x - x^2 = -(x^2 - 4x)$$

$$4x - x^2 = -(x^2 - 4x + 4 - 4)$$

$$4x - x^2 = -[(x-2)^2 - 4]$$

$$4x - x^2 = -(x-2)^2 + 4$$

$$4x - x^2 = 4 - (x-2)^2$$

La integral planteada se escribe en la forma siguiente:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{[4-(x-2)^2]^3}}$$

El integrando tiene la forma  $\sqrt{a^2 - u^2}$ , se hace la sustitución:

$$x - 2 = 2 \operatorname{sen} \theta$$

$$dx = 2 \cos \theta d\theta$$

Al sustituir  $x$  y  $dx$  en la integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = \int \frac{2 \cos \theta d\theta}{\sqrt{[4-(2 \operatorname{sen} \theta)^2]^3}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = 2 \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{(4-4 \operatorname{sen}^2 \theta)^3}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = 2 \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{[4(1-\operatorname{sen}^2 \theta)]^3}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = 2 \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{(4 \cos^2 \theta)^3}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = 2 \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{64 \cos^6 \theta}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = 2 \int \frac{\cos \theta d\theta}{8 \cos^3 \theta}$$

Al simplificar los valores numéricos y el factor  $\cos \theta$ :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = \frac{1}{4} \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = \frac{1}{4} \int \sec^2 \theta d\theta$$

La integración conduce a:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = \frac{1}{4} \tan \theta + C \text{ (Ecuación 1).}$$

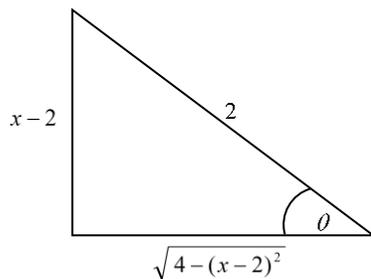
Para volver a la variable original se debe definir  $\tan \theta$  en función de  $x$ .

Partiendo de la sustitución trigonométrica realizada:

$$x - 2 = 2 \operatorname{sen} \theta$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{x-2}{2} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

Se construye un triángulo rectángulo cuyo cateto opuesto es  $x - 2$  e hipotenusa es 2. El lado faltante, se determina con la aplicación del teorema de Pitágoras.



Observe que la magnitud del lado faltante coincide con la expresión  $\sqrt{4-(x-2)^2}$  que se encuentra en el integrando.

A partir del triángulo obtenido, se define  $\tan \theta$ .

$$\tan \theta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$$

$$\tan \theta = \frac{x-2}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$$

Al sustituir en la Ecuación 1:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = \frac{1}{4} \left[ \frac{x-2}{\sqrt{4-(x-2)^2}} \right] + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = \frac{x-2}{4\sqrt{4-(x-2)^2}}$$

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **Métodos de Integración, Sustitución Trigonométrica**, perteneciente a la asignatura **Cálculo Integral**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

<http://www.tutoruniversitario.com/>

Si Usted requiere la resolución de ejercicios adicionales acerca de ésta u otras asignaturas, contáctenos a través de los siguientes medios:

- WhatsApp: +58-4249744352 (En forma directa o desde nuestra página web).
- E-mail: [medinawj@gmail.com](mailto:medinawj@gmail.com)

Lista de asignaturas en las cuales podemos ayudarle:

Cálculo Diferencial.	Cálculo Integral.	Cálculo Vectorial.
Ecuaciones Diferenciales.	Trigonometría.	Matemáticas Aplicadas.
Matemáticas Financieras.	Álgebra Lineal.	Métodos Numéricos.
Estadística.	Física (Mecánica).	Física (Electricidad).
Mecánica Vectorial.	Química Inorgánica.	Fisicoquímica.
Termodinámica.	Termodinámica Química.	Mecánica de Fluidos.
Fenómenos de Transporte.	Transferencia de Calor.	Ingeniería Económica.