Ejemplo 16. Ejemplo 1. Sección 10.6 del Larson. Segunda Edición. Página 466. Ejemplo 117 del Filippis. Página 291. Ejemplo 6.5 del Cortés. Octava Edición. Página 169.

Calcular $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

Solución.

El integrando tiene la forma $\sqrt{a^2-u^2}$, se hace la sustitución:

$x=3\operatorname{sen}\theta$

$dx=3\cos\theta\,d\theta$

Al sustituir x y dx en la integral:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}=\int \frac{3\cos\theta\,d\theta}{(3\operatorname{sen}\theta)^2\sqrt{9-(3\operatorname{sen}\theta)^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}=3\int \frac{\cos\theta\,d\theta}{9\operatorname{sen}^2\theta\sqrt{9-9\operatorname{sen}^2\theta}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}=\frac{1}{3}\int \frac{\cos\theta\,d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta\sqrt{9(1-\operatorname{sen}^2\theta)}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}=\frac{1}{3}\int \frac{\cos\theta\,d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta\sqrt{9\cos^2\theta}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}=\frac{1}{3}\int \frac{\cos\theta\,d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta\times 3\cos\theta}$$

Al asociar los valores numéricos y simplificar el factor $\cos\theta$:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}=\frac{1}{9}\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}=\frac{1}{9}\int \csc^2\theta\,d\theta$$

La integración conduce a:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}=\frac{1}{9}(-\cot\theta+C)$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = -\frac{1}{9}\cot\theta + C \text{ (Ecuación 1).}$$

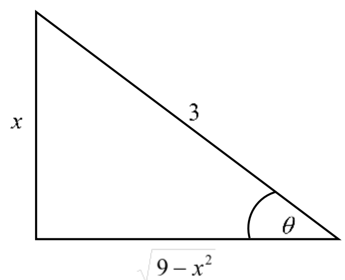
Para volver a la variable original se debe definir $\cot\theta$ en función de *x*.

Partiendo de la sustitución trigonométrica realizada:

$$x = 3\operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

Se construye un triángulo rectángulo cuyo cateto opuesto es *x* e hipotenusa es 3. El lado faltante, se determina con la aplicación del teorema de Pitágoras.



Observe que la magnitud del lado faltante coincide con la expresión $\sqrt{9-x^2}$ que se encuentra en el integrando.

A partir del triángulo obtenido, se define $\cot\theta$.

$$\cot\theta = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Cateto opuesto}}$$

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

Al sustituir en la Ecuación 1:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = -\frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C$$

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **Métodos de integración-Por sustitución trigonométrica, de la asignatura Cálculo Integral**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

http://www.tutoruniversitario.com/