Ejemplo 34. Ejemplo 6. Sección 10.6 del Larson. Segunda Edición. Página 469.

Calcular $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du$

Solución.

El integrando tiene la forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, se hace la sustitución:

$u = a\,\mathrm{sen}\,\theta$

$du = a\cos\theta\, d\theta$

Al sustituir u y du en la integral:

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \int \sqrt{a^2 - (a\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}\, a\cos\theta\, d\theta$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = a\int \sqrt{a^2 - a^2\,\mathrm{sen}^2\theta}\cos\theta\, d\theta$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = a\int \sqrt{a^2(1 - \mathrm{sen}^2\theta)}\cos\theta\, d\theta$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = a\int \sqrt{a^2\cos^2\theta}\cos\theta\, d\theta$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = a\int a\cos\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = a^2\int \cos^2\theta\, d\theta$$

La integral anterior se resuelve aplicando integración de potencias de funciones trigonométricas.

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = a^2\int \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = a^2\int (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \tfrac{1}{2}a^2\int d\theta + \tfrac{1}{2}a^2\int \cos 2\theta\, d\theta$$

La integración conduce a:

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \tfrac{1}{2}a^2\theta + \tfrac{1}{2}a^2(\tfrac{1}{2}\mathrm{sen}\,2\theta) + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \tfrac{1}{2}a^2\theta + \tfrac{1}{4}a^2\mathrm{sen}\,2\theta + C$$

Para volver a la variable inicial, no es posible definir en forma directa $\mathrm{sen}\,2\theta$ en función de x, por lo cual se aplica la identidad $\mathrm{sen}\,2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$

$$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \tfrac{1}{2}a^2\theta + \tfrac{1}{4}a^2(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + C$$

$$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \tfrac{1}{2}a^2\theta + \tfrac{1}{2}a^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C \text{ (Ecuación 1).}$$

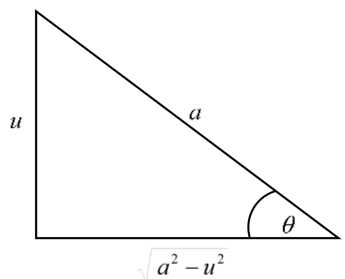
Para volver a la variable original se debe definir θ, $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ en función de *u*.

Partiendo de la sustitución trigonométrica realizada:

$$u = a\operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{u}{a} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

Se construye un triángulo rectángulo cuyo cateto opuesto es *u* e hipotenusa es *a*. El lado faltante, se determina con la aplicación del teorema de Pitágoras.



Observe que la magnitud del lado faltante coincide con la expresión $\sqrt{a^2-u^2}$ que se encuentra en el integrando.

A partir del triángulo obtenido, se define θ, $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{u}{a}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$

Al sustituir en la Ecuación 1:

$$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \tfrac{1}{2}a^2\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)\right] + \tfrac{1}{2}a^2\left(\frac{u}{a}\right)\left(\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a}\right) + C$$

$$\int \sqrt{a^2-u^2}\,dx = \tfrac{1}{2}a^2\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + \tfrac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2} + C$$

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **Métodos de integración-Por sustitución trigonométrica, de la asignatura Cálculo Integral**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

http://www.tutoruniversitario.com/