Ejemplo 31. Ejemplo 5. Sección 9.4 del Thomas. Sexta Edición. Página 427. Ejemplo 118 del Filippis. Página 292. Ejemplo 6.6 del Cortés. Octava Edición. Página 169.

Calcular $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

Solución.

El integrando tiene la forma $\sqrt{a^2-u^2}$, se hace la sustitución:

$x=3\operatorname{sen}\theta$

$dx=3\cos\theta\,d\theta$

Al sustituir x y dx en la integral:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx=\int \frac{(3\operatorname{sen}\theta)^2}{\sqrt{9-(3\operatorname{sen}\theta)^2}}3\cos\theta\,d\theta$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx=3\int \frac{9\operatorname{sen}^2\theta}{\sqrt{9-9\operatorname{sen}^2\theta}}\cos\theta\,d\theta$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx=27\int \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{9(1-\operatorname{sen}^2\theta)}}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx=27\int \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{9\cos^2\theta}}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx=27\int \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta}{3\cos\theta}$$

Al simplificar los valores numéricos y el factor $\cos\theta$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx=9\int \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta$$

La integral anterior se resuelve aplicando integración de potencias de funciones trigonométricas.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx=9\int (\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,d\,x = \tfrac{9}{2}\int d\,\theta - \tfrac{9}{2}\int \cos 2\theta\, d\,\theta$$

La integración conduce a:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,d\,x = \tfrac{9}{2}\theta - \tfrac{9}{2}(\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\,\theta) + C$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,d\,x = \tfrac{9}{2}\theta - \tfrac{9}{4}\operatorname{sen} 2\,\theta + C$$

Para volver a la variable inicial, no es posible definir en forma directa $\operatorname{sen} 2\theta$ en función de *x*, por lo cual se aplica la identidad $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,d\,x = \tfrac{9}{2}\theta - \tfrac{9}{4}(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + C$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,d\,x = \tfrac{9}{2}\theta - \tfrac{9}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C \text{ (Ecuación 1).}$$

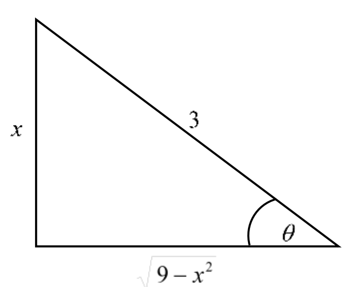
Para volver a la variable original se debe definir θ, $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ en función de *x*.

Partiendo de la sustitución trigonométrica realizada:

$$x = 3\operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

Se construye un triángulo rectángulo cuyo cateto opuesto es *x* e hipotenusa es 3. El lado faltante, se determina con la aplicación del teorema de Pitágoras.



Observe que la magnitud del lado faltante coincide con la expresión $\sqrt{9-x^2}$ que se encuentra en el integrando.

A partir del triángulo obtenido, se define θ, $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

Al sustituir en la Ecuación 1:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,d\,x = \tfrac{9}{2}\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right] - \tfrac{9}{2}\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right) + C$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,d\,x = \tfrac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \tfrac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + C$$

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **Métodos de integración-Por sustitución trigonométrica, de la asignatura Cálculo Integral**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

http://www.tutoruniversitario.com/