Ejemplo 27. Ejemplo 114 del Filippis. Página 289. Ejemplo 6.2 del Cortés. Octava Edición. Página 167.

Calcular $\int \frac{\sqrt{25-x^2}\,dx}{x}$

Solución.

El integrando tiene la forma $\sqrt{a^2-u^2}$, se hace la sustitución:

$x = 5\operatorname{sen}\theta$

$dx = 5\cos\theta\,d\theta$

Al sustituir x y dx en la integral:

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}\,dx}{x} = \int \frac{\sqrt{25-(5\operatorname{sen}\theta)^2}\,(5\cos\theta\,d\theta)}{5\operatorname{sen}\theta}$$

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}\,dx}{x} = \int \frac{\sqrt{25-25\operatorname{sen}^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}\,dx}{x} = \int \frac{\sqrt{25(1-\operatorname{sen}^2\theta)}\,\cos\theta\,d\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}\,dx}{x} = \int \frac{\sqrt{25\cos^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}\,dx}{x} = \int \frac{5\cos\theta\cos\theta\,d\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}\,dx}{x} = 5\int \frac{\cos^2\theta\,d\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}\,dx}{x} = 5\int \frac{(1-\operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}\,dx}{x} = 5\int \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right) d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}\,dx}{x} = 5\int (\csc\theta - \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}\,dx}{x} = 5\int \csc\theta\,d\theta - 5\int \operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

La integración conduce a:

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}\,dx}{x} = 5\ln(\csc\theta - \cot\theta) - 5(-\cos\theta) + C$$

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}\,dx}{x} = 5\ln(\csc\theta - \cot\theta) + 5\cos\theta + C \text{ (Ecuación 1).}$$

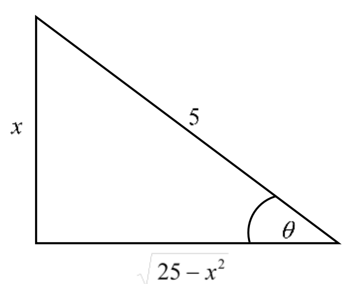
Para volver a la variable original se debe definir $\csc\theta$, $\cot\theta$ y $\cos\theta$ en función de *x*.

Partiendo de la sustitución trigonométrica realizada:

$$x = 5\operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{5} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

Se construye un triángulo rectángulo cuyo cateto opuesto es *x* e hipotenusa es 5. El lado faltante, se determina con la aplicación del teorema de Pitágoras.



Observe que la magnitud del lado faltante coincide con la expresión $\sqrt{25-x^2}$ que se encuentra en el integrando.

A partir del triángulo obtenido, se define $\csc\theta$, $\cot\theta$ y $\cos\theta$.

$$\csc\theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}}$$

$$\csc\theta = \frac{5}{x}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Cateto opuesto}}$$

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{25-x^2}}{5}$$

Al sustituir en la Ecuación 1:

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}\,dx}{x} = 5\ln\left(\frac{5}{x} - \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\right) + 5\left(\frac{\sqrt{25-x^2}}{5}\right) + C$$

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}\,dx}{x} = 5\ln\left(\frac{5-\sqrt{25-x^2}}{x}\right) + \sqrt{25-x^2} + C$$

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **Métodos de integración-Por sustitución trigonométrica, de la asignatura Cálculo Integral**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

http://www.tutoruniversitario.com/