Ejemplo 20. Ejemplo 116 del Filippis. Página 291. Ejemplo 6.4 del Cortés. Octava Edición. Página 168.

Calcular $\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\,x$

Solución.

El integrando tiene la forma $\sqrt{a^2-u^2}$, se hace la sustitución:

$x = a\,\text{sen}\,\theta$

$d\,x = a\cos\theta\,d\,\theta$

Al sustituir x y $d\,x$ en la integral:

$$\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\,x = \int \frac{(a\,\text{sen}\,\theta)^2}{[a^2-(a\,\text{sen}\,\theta)^2]^{\frac{3}{2}}}\,a\cos\theta\,d\,\theta$$

$$\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\,x = a\int \frac{a^2\text{sen}^2\theta}{(a^2-a^2\text{sen}^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\cos\theta\,d\,\theta$$

$$\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\,x = a^3\int \frac{\text{sen}^2\theta\cos\theta\,d\,\theta}{[a^2(1-\text{sen}^2\theta)]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\,x = a^3\int \frac{\text{sen}^2\theta\cos\theta\,d\,\theta}{(a^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\,x = a^3\int \frac{\text{sen}^2\theta\cos\theta\,d\,\theta}{a^3\cos^3\theta}$$

Al simplificar a^3 y un factor $\cos\theta$:

$$\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\,x = \int \frac{\text{sen}^2\theta\,d\,\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\,x = \int \tan^2\theta\,d\,\theta$$

$$\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\,x = \int (\sec^2\theta-1)\,d\,\theta$$

$$\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \sec^2\theta\,d\theta - \int d\theta$$

La integración conduce a:

$$\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \tan\theta - \theta + C \quad \text{(Ecuación 1).}$$

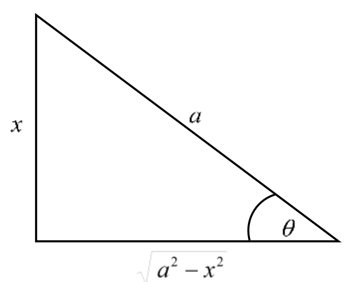
Para volver a la variable original se debe definir $\tan\theta$ y θ en función de x.

Partiendo de la sustitución trigonométrica realizada:

$$x = a\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

Se construye un triángulo rectángulo cuyo cateto opuesto es x e hipotenusa es a. El lado faltante, se determina con la aplicación del teorema de Pitágoras.



Observe que la magnitud del lado faltante coincide con la expresión $\sqrt{a^2-x^2}$ que se encuentra en el integrando.

A partir del triángulo obtenido, se define $\tan\theta$.

$$\tan\theta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\theta = \mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Al sustituir en la Ecuación 1:

$$\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$