Ejemplo 18 del Evaristo Diz Cruz. Página 37.

Una estación de servicio desea determinar el promedio de número de litros de gasolina comprados por sus clientes. Seleccionan 100 clientes aleatoriamente y determinan el promedio en 9.5. De pruebas pilotos se conoce que la desviación estándar poblacional σ = 2. Calcule al 95% de confianza intervalo para estimar el promedio de gasolina comprado.

Solución.

Variable: Litros de gasolina comprados por los clientes de una estación de servicio.

Tamaño de la muestra: n = 100

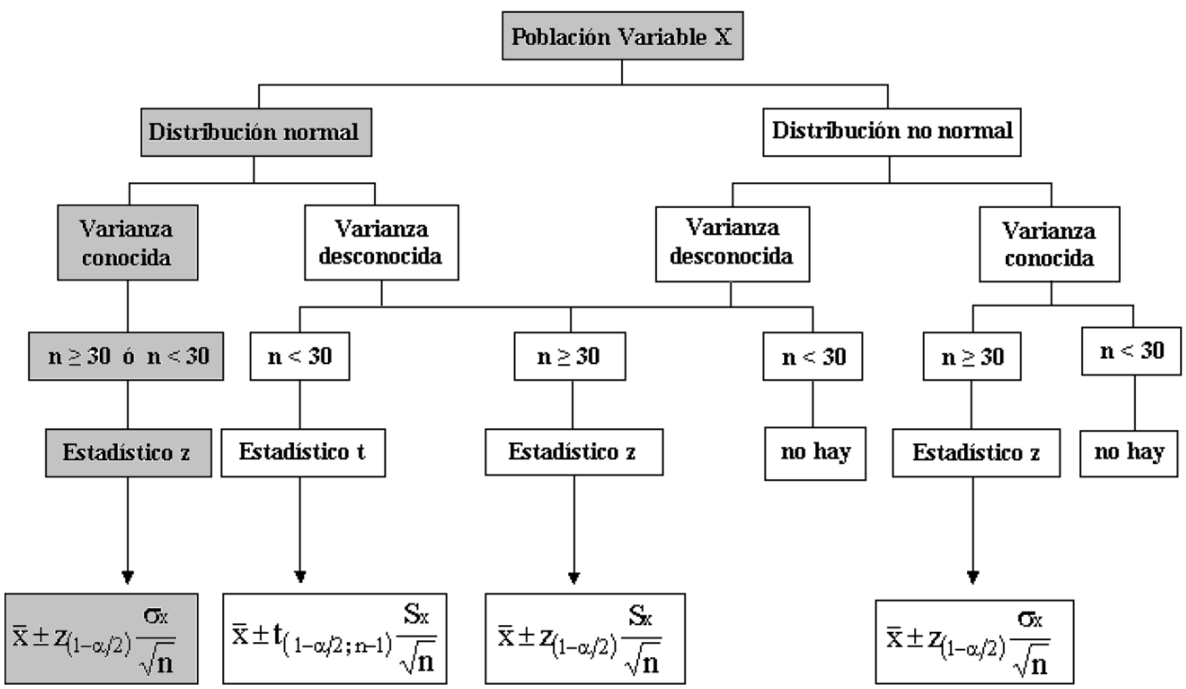
Media muestral: $\bar{X} = 9.5$ litros

Desviación estándar poblacional: σ = 2 litros

Nivel de confianza: 1 – α = 0.95

Supuesto: La población está normalmente distribuida.

Distribución a utilizar.



El intervalo de confianza para la media puede expresarse en cualquiera de las cuatro formas siguientes:

$$\mu:\ \overline{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}\text{, con } \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ (Error estándar de la media)} \qquad (1)$$

$$\mu:\ \overline{X} \pm E\text{, con } E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ (Margen de error)} \qquad (2)$$

$$\mu:\ \overline{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (3)$$

$$\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (4)$$

Se ilustrará el cálculo con las cuatro formas presentadas, sin embargo, el uso de sólo una es suficiente para obtener la solución del problema.

Determinación de $z_{\alpha/2}$.

Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0.95$.

$1 - \alpha = 0.95$

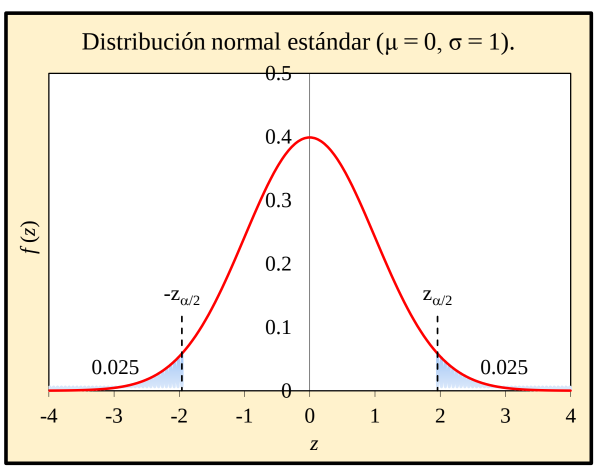
$\alpha = 1 - 0.95$

$\alpha = 0.05$

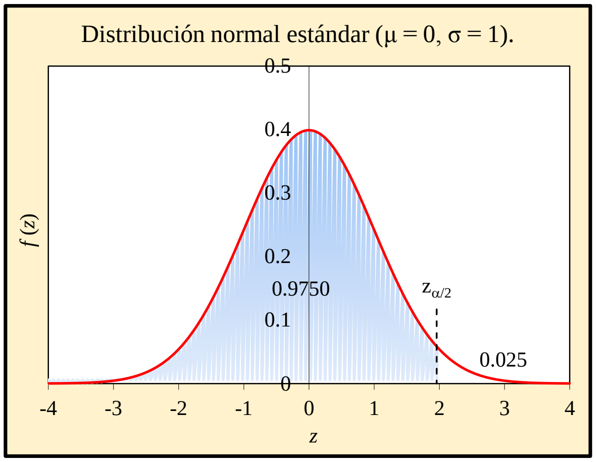
$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$z_{\alpha/2} = z_{0.025}$ es el valor de z que tiene un área de 0.025 a la derecha.



El área acumulada a la izquierda es 1 – 0.025 = 0.9750.



Técnicamente, el valor de z se determina como $P(z \leq z_{\alpha/2}) = 0.9750$.

En palabras, z será el valor que corresponda a la probabilidad de 0.9750.

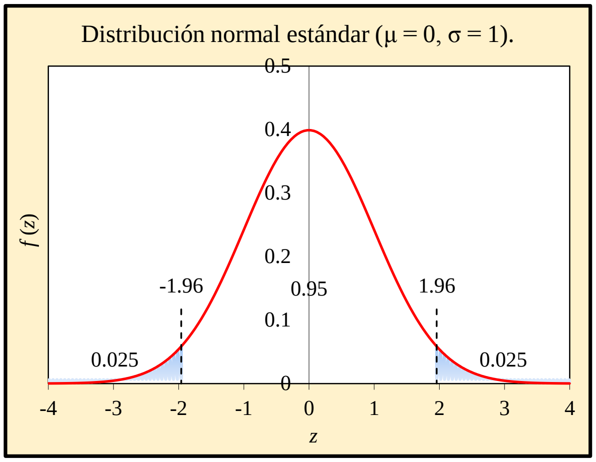
Para calcular este valor, se reproduce parte de la tabla de la normal estándar presentada en el apéndice del libro.

Se busca el valor de 0.9750 y se identifica el valor z que se relaciona con esta probabilidad.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	$\boxed{0.9750}$	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Como se puede observar, cuando la probabilidad es 0.9750, el valor de z es igual a 1.96.

$z_{\alpha/2} = 1.96$



Determinación del intervalo de confianza.

Primer mecanismo de solución. Ecuación (1).

μ: $\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}$

Error estándar de la media.

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{2}{\sqrt{100}}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{2}{10}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = 0.2$$

Intervalo de confianza.

μ: 9.5 ± 1.96 × 0.2

μ: 9.5 ± 0.392

Límite inferior de confianza.

LIC = 9.5 – 0.392 = 9.108

Límite superior de confianza.

LSC = 9.5 + 0.392 = 9.892

Intervalo de confianza.

9.108 litros $\leq \mu \leq$ 9.892 litros

Segundo mecanismo de solución. Ecuación (2).

μ: $\overline{X} \pm E$

Margen de error.

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$E = 1.96\times\frac{2}{\sqrt{100}}$$

$$E = 1.96\times\frac{2}{10}$$

$E = 1.96 \times 0.2$

$E = 0.392$

Intervalo de confianza.

μ: 9.5 ± 0.392

Límite inferior de confianza.

$LIC = 9.5 – 0.392 = 9.108$

Límite superior de confianza.

$LSC = 9.5 + 0.392 = 9.892$

Intervalo de confianza.

$9.108 \text{ litros} \leq \mu \leq 9.892 \text{ litros}$

Tercer mecanismo de solución. Ecuación (3).

μ: $\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

μ: $9.5 \pm 1.96\times\dfrac{2}{\sqrt{100}}$

μ: $9.5 \pm 1.96\times\dfrac{2}{10}$

μ: $9.5 \pm 1.96 \times 0.2$

μ: 9.5 ± 0.392

Límite inferior de confianza.

$LIC = 9.5 - 0.392 = 9.108$

Límite superior de confianza.

$LSC = 9.5 + 0.392 = 9.892$

Intervalo de confianza.

9.108 litros $\leq \mu \leq$ 9.892 litros

Cuarto mecanismo de solución. Ecuación (4).

$$\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$9.5 - 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{100}} \leq \mu \leq 9.5 + 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{100}}$$

$$9.5 - 1.96 \times \frac{2}{10} \leq \mu \leq 9.5 + 1.96 \times \frac{2}{10}$$

$9.5 - 1.96 \times 0.2 \leq \mu \leq 9.5 + 1.96 \times 0.2$

$9.5 - 0.392 \leq \mu \leq 9.5 + 0.392$

$9.108 \leq \mu \leq 9.892$

Límite inferior de confianza.

$LIC = 9.108$

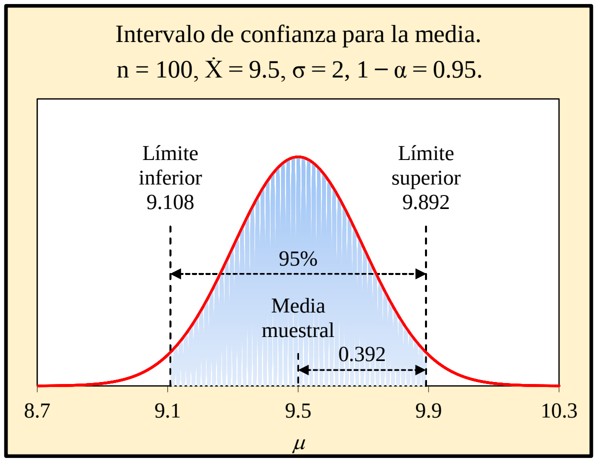
Límite superior de confianza.

$LSC = 9.892$

Intervalo de confianza.

9.108 litros $\leq \mu \leq$ 9.892 litros

Gráfico del intervalo de confianza.



Interpretación práctica del intervalo de confianza.

Tenemos una confianza del 95% de que el intervalo de 9.108 litros a 9.892 litros contiene el valor verdadero de los litros promedio de gasolina comprados por los clientes de una estación de servicio μ.

Interpretación probabilística del intervalo de confianza.

Si seleccionáramos diferentes muestras aleatorias y construyéramos los correspondientes intervalos de confianza, el 95% contendría el valor verdadero de los litros promedio de gasolina comprados por los clientes de una estación de servicio μ.