

Ejemplo 5.3.1 del Segnini. Página 91.

Al examinar 9 porciones de agua se encontró una concentración promedio de ión nitrato igual a $0.5 \mu\text{g/mL}$. Se desea estimar mediante un intervalo de confianza del 95% la concentración promedio del nitrato en el agua, si se sabe que la desviación estándar del método para éste análisis es de $0.15 \mu\text{g/mL}$.

Solución.

Variable: Concentración de ión nitrato.

Tamaño de la muestra: $n = 9$

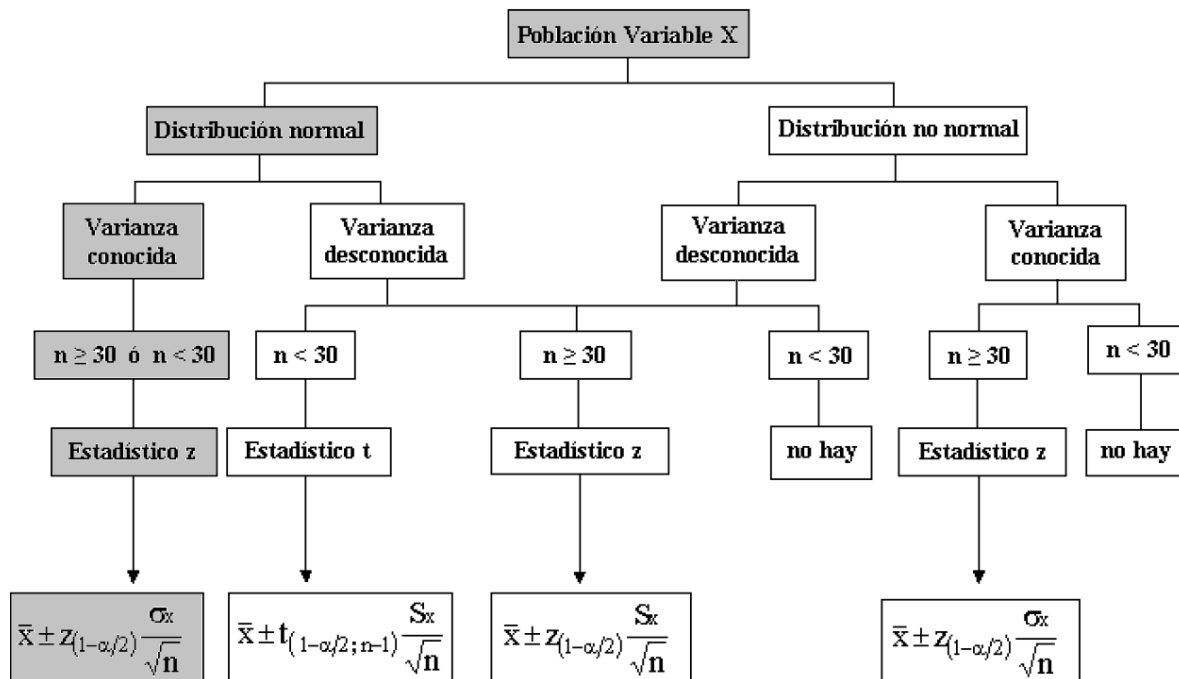
Media muestral: $\bar{X} = 0.5 \mu\text{g/mL}$

Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0.95$

Desviación estándar poblacional: $\sigma = 0.15 \mu\text{g/mL}$

Supuesto: La población está normalmente distribuida.

Distribución a utilizar.



El intervalo de confianza para la media puede expresarse en cualquiera de las cuatro formas siguientes:

$$\mu: \bar{X} \pm z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}, \text{ con } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ (Error estándar de la media)} \quad (1)$$

$$\mu: \bar{X} \pm E, \text{ con } E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ (Margen de error)} \quad (2)$$

$$\mu: \bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (3)$$

$$\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (4)$$

Se ilustrará el cálculo con las cuatro formas presentadas, sin embargo, el uso de sólo una es suficiente para obtener la solución del problema.

Determinación de $z_{\alpha/2}$.

Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0.95$.

$$1 - \alpha = 0.95$$

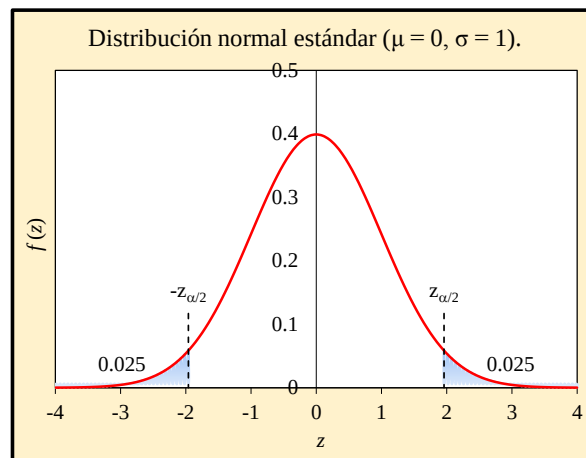
$$\alpha = 1 - 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

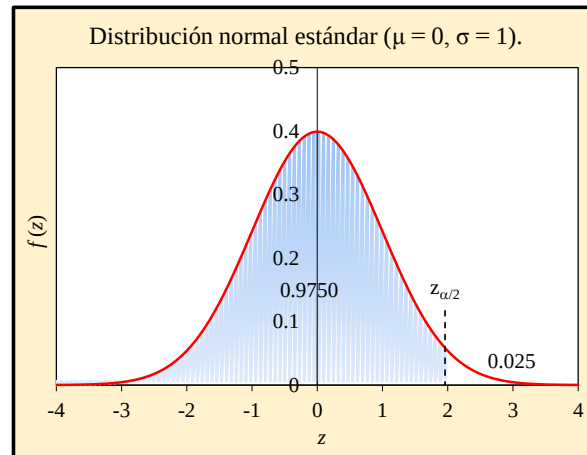
$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$z_{\alpha/2} = z_{0.025}$ es el valor de z que tiene un área de 0.025 a la derecha.



El área acumulada a la izquierda es $1 - 0.025 = 0.9750$.



Técnicamente, el valor de z se determina como $P(z \leq z_{\alpha/2}) = 0.9750$.

En palabras, z será el valor que corresponda a la probabilidad de 0.9750.

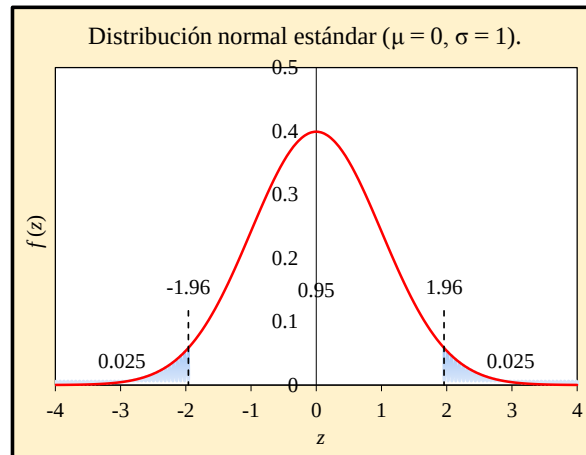
Para calcular este valor, se reproduce parte de la tabla de la normal estándar presentada en el apéndice del libro.

Se busca el valor de 0.9750 y se identifica el valor z que se relaciona con esta probabilidad.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Como se puede observar, cuando la probabilidad es 0.9750, el valor de z es igual a 1.96.

$$z_{\alpha/2} = 1.96$$



Determinación del intervalo de confianza.

Primer mecanismo de solución. Ecuación (1).

$$\mu: \bar{X} \pm z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$$

Error estándar de la media.

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{0.15}{\sqrt{9}}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{0.15}{3}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = 0.05$$

Intervalo de confianza.

$$\mu: 0.5 \pm 1.96 \times 0.05$$

$$\mu: 0.5 \pm 0.098$$

Límite inferior de confianza.

$$LIC = 0.5 - 0.098 = 0.402$$

Límite superior de confianza.

$$LSC = 0.5 + 0.098 = 0.598$$

Intervalo de confianza.

$$0.402 \mu\text{g/mL} \leq \mu \leq 0.598 \mu\text{g/mL}$$

Segundo mecanismo de solución. Ecuación (2).

$$\mu: \bar{X} \pm E$$

Margen de error.

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$E = 1.96 \times \frac{0.15}{\sqrt{9}}$$

$$E = 1.96 \times \frac{0.15}{3}$$

$$E = 1.96 \times 0.05$$

$$E = 0.098$$

Intervalo de confianza.

$$\mu: 0.5 \pm 0.098$$

Límite inferior de confianza.

$$LIC = 0.5 - 0.098 = 0.402$$

Límite superior de confianza.

$$LSC = 0.5 + 0.098 = 0.598$$

Intervalo de confianza.

$$0.402 \mu\text{g/mL} \leq \mu \leq 0.598 \mu\text{g/mL}$$

Tercer mecanismo de solución. Ecuación (3).

$$\mu: \bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mu: 0.5 \pm 1.96 \times \frac{0.15}{\sqrt{9}}$$

$$\mu: 0.5 \pm 1.96 \times \frac{0.15}{3}$$

$$\mu: 0.5 \pm 1.96 \times 0.05$$

$$\mu: 0.5 \pm 0.098$$

Límite inferior de confianza.

$$LIC = 0.5 - 0.098 = 0.402$$

Límite superior de confianza.

$$LSC = 0.5 + 0.098 = 0.598$$

Intervalo de confianza.

$$0.402 \mu\text{g/mL} \leq \mu \leq 0.598 \mu\text{g/mL}$$

Cuarto mecanismo de solución. Ecuación (4).

$$\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$0.5 - 1.96 \times \frac{0.15}{\sqrt{9}} \leq \mu \leq 0.5 + 1.96 \times \frac{0.15}{\sqrt{9}}$$

$$0.5 - 1.96 \times \frac{0.15}{3} \leq \mu \leq 0.5 + 1.96 \times \frac{0.15}{3}$$

$$0.5 - 1.96 \times 0.05 \leq \mu \leq 0.5 + 1.96 \times 0.05$$

$$0.5 - 0.098 \leq \mu \leq 0.5 + 0.098$$

$$0.402 \leq \mu \leq 0.598$$

Límite inferior de confianza.

$$LIC = 0.402$$

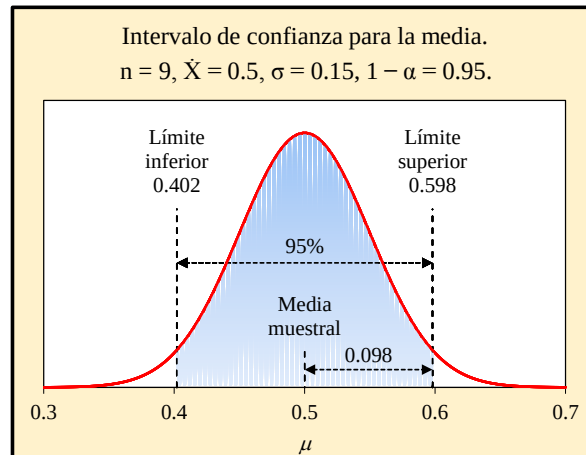
Límite superior de confianza.

$$LSC = 0.598$$

Intervalo de confianza.

$$0.402 \mu\text{g/mL} \leq \mu \leq 0.598 \mu\text{g/mL}$$

Gráfico del intervalo de confianza.

**Interpretación práctica del intervalo de confianza.**

Tenemos una confianza del 95% de que el intervalo de $0.402 \mu\text{g/mL}$ a $0.598 \mu\text{g/mL}$ contiene el valor verdadero de la concentración promedio de ión nitrato μ .

Interpretación probabilística del intervalo de confianza.

Si seleccionáramos diferentes muestras aleatorias y construyéramos los correspondientes intervalos de confianza, el 95% contendría el valor verdadero de la concentración promedio de ión nitrato μ .

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **Estimación de Parámetros e Intervalos de Confianza**, perteneciente a la asignatura **Estadística**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

<http://www.tutoruniversitario.com/>

Si Usted requiere la resolución de ejercicios adicionales acerca de este tema o asignatura, contáctenos a través del WhatsApp disponible en nuestra página web.