Ejemplo 6.3 del Jay Devore. Página 205.

No hace mucho tiempo que el proceso de producción de una caja de control de un tipo particular para un motor fue modificado. Antes de esta modificación, los datos históricos sugirieron que la distribución de los diámetros de agujeros para bujes en las cajas era normal con desviación estándar de 0.100 mm. Se cree que la modificación no ha afectado la forma de la distribución o la desviación estándar, pero que el valor del diámetro medio pudo cambiar. Se selecciona una muestra de 40 cajas y se determina el diámetro de agujero para cada una, y el resultado es un diámetro medio muestral de 5.426 mm. Calcule un intervalo de confianza para el diámetro de agujero promedio verdadero utilizando un nivel de confianza de 90%.

Solución.

Variable: Diámetro de agujeros para bujes en las cajas

Desviación estándar poblacional: $\sigma = 0.100$ mm

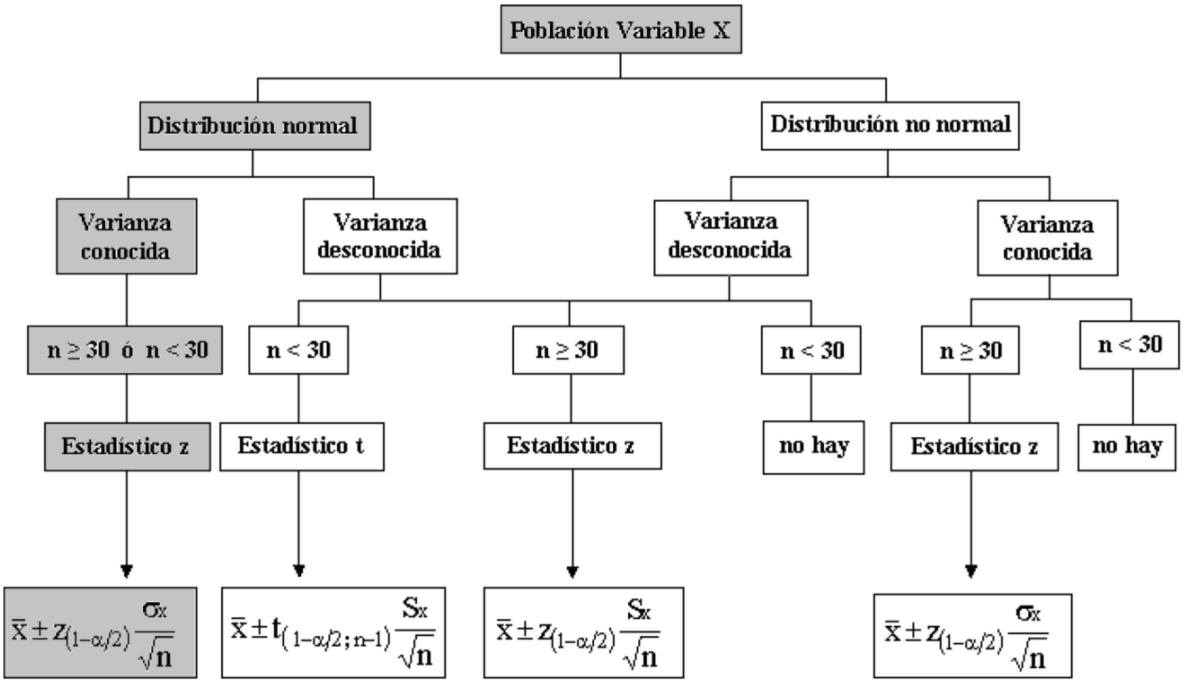
Tamaño de la muestra: $n = 40$

Media muestral: $\overline{X} = 5.426$ mm

Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0.90$

Intervalo de confianza para la media poblacional, σ^2 conocida.

Distribución a utilizar.



El intervalo de confianza para la media puede expresarse en cualquiera de las cuatro formas siguientes:

μ: $\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}$, con $\sigma_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (Error estándar de la media) (1)

μ: $\bar{X} \pm E$, con $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (Margen de error) (2)

μ: $\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (3)

$X - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le X + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (4)

Se ilustrará el cálculo con las cuatro formas presentadas, sin embargo, el uso de sólo una es suficiente para obtener la solución del problema.

Determinación de $z_{\alpha/2}$.

Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0.90$.

$1 - \alpha = 0.90$

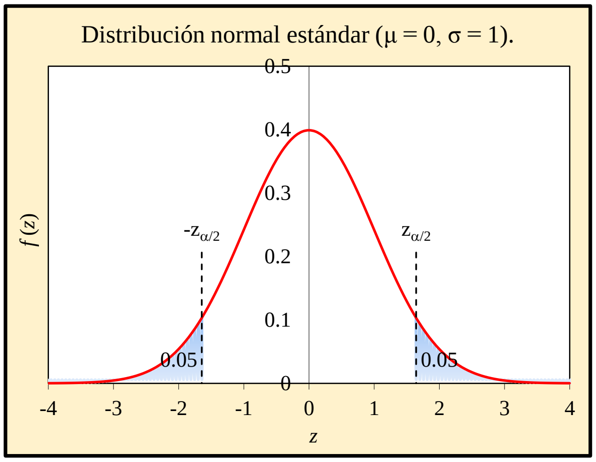
$\alpha = 1 - 0.90$

$\alpha = 0.10$

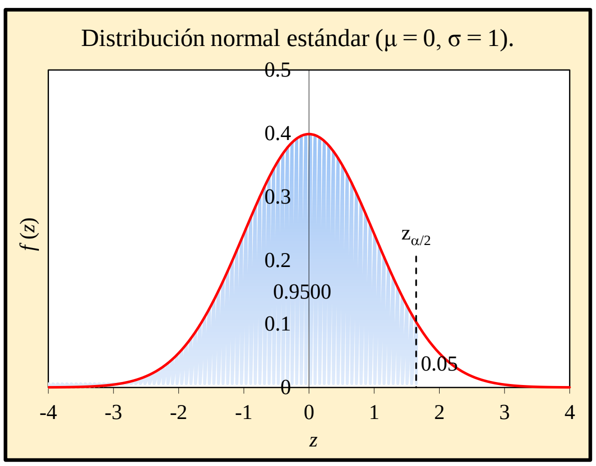
$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.10}{2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.05$$

$z_{\alpha/2} = z_{0.05}$ es el valor de z que tiene un área de 0.05 a la derecha.



El área acumulada a la izquierda es 1 – 0.05 = 0.9500.



Técnicamente, el valor de z se determina como $P(z \leq z_{\alpha/2}) = 0.9500$.

En palabras, z será el valor que corresponda a la probabilidad de 0.9500.

Para calcular este valor, se reproduce parte de la tabla de la normal estándar presentada en el apéndice del libro.

Se busca el valor de 0.9500 y se identifica el valor z que se relaciona con esta probabilidad.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	$\boxed{0.9505}$	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

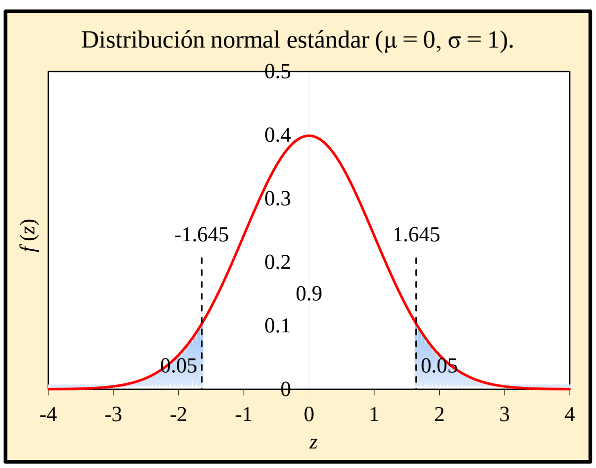
No encontramos 0.9500 exactamente. Los valores más cercanos son los que corresponden a 0.9495 (z = 1.64) y 0.9505 (z = 1.65). Se aplica interpolación lineal.

Probabilidad	z
0.9495	1.64
0.9500	z
0.9505	1.65

$$\frac{z-1.64}{1.65-1.64}=\frac{0.9500-0.9495}{0.9505-0.9495}$$

$$z=\left(\frac{0.9500-0.9495}{0.9505-0.9495}\right)(1.65-1.64)+1.64$$

$z_{\alpha/2}$ = 1.645



Determinación del intervalo de confianza.

Primer mecanismo de solución. Ecuación (1).

μ: $\bar{X}\pm z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}$

Error estándar de la media.

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{0.100}{\sqrt{40}}$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{0.100}{6.32455532}$$

$$\sigma_{\overline{X}} = 0.0158$$

Intervalo de confianza.

μ: 5.426 ± 1.645 × 0.0158

μ: 5.426 ± 0.026

Límite inferior de confianza.

LIC = 5.426 – 0.026 = 5.400

Límite superior de confianza.

LSC = 5.426 + 0.026 = 5.452

Intervalo de confianza.

5.400 mm ≤ μ ≤ 5.452 mm

Segundo mecanismo de solución. Ecuación (2).

μ: $\overline{X} \pm E$

Margen de error.

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$E = 1.645 \times \frac{0.100}{\sqrt{40}}$$

$$E = 1.645 \times \frac{0.100}{6.32455532}$$

E = 1.645 × 0.0158

E = 0.026

Intervalo de confianza.

μ: 5.426 ± 0.026

Límite inferior de confianza.

$LIC = 5.426 - 0.026 = 5.400$

Límite superior de confianza.

$LSC = 5.426 + 0.026 = 5.452$

Intervalo de confianza.

$5.400 \text{ mm} \leq \mu \leq 5.452 \text{ mm}$

Tercer mecanismo de solución. Ecuación (3).

$$\mu:\ \bar{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mu:\ 5.426 \pm 1.645 \times \frac{0.100}{\sqrt{40}}$$

$$\mu:\ 5.426 \pm 1.645 \times \frac{0.100}{6.32455532}$$

μ: $5.426 \pm 1.645 \times 0.0158$

μ: 5.426 ± 0.026

Límite inferior de confianza.

$LIC = 5.426 - 0.026 = 5.400$

Límite superior de confianza.

$LSC = 5.426 + 0.026 = 5.452$

Intervalo de confianza.

$5.400 \text{ mm} \leq \mu \leq 5.452 \text{ mm}$

Cuarto mecanismo de solución. Ecuación (4).

$$\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$5.426 - 1.645 \times \frac{0.100}{\sqrt{40}} \leq \mu \leq 5.426 + 1.645 \times \frac{0.100}{\sqrt{40}}$$

$$5.426 - 1.645 \times \frac{0.100}{6.32455532} \leq \mu \leq 5.426 + 1.645 \times \frac{0.100}{6.32455532}$$

$5.426 - 1.645 \times 0.0158 \leq \mu \leq 5.426 + 1.645 \times 0.0158$

$5.426 - 0.026 \leq \mu \leq 5.426 + 0.026$

$5.400 \leq \mu \leq 5.452$

Límite inferior de confianza.

$LIC = 5.400$

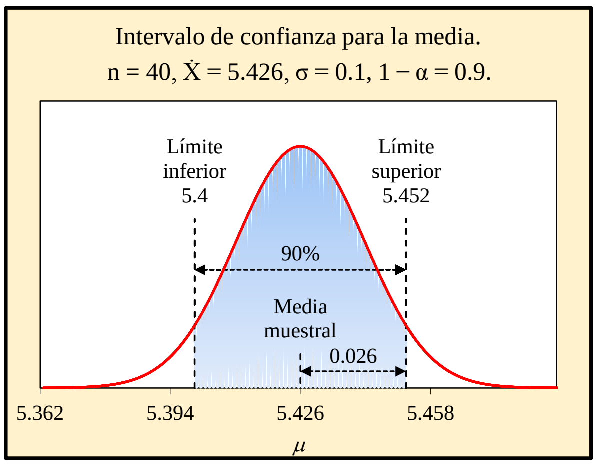
Límite superior de confianza.

$LSC = 5.452$

Intervalo de confianza.

$5.400 \text{ mm} \leq \mu \leq 5.452 \text{ mm}$

Gráfico del intervalo de confianza.



Interpretación práctica del intervalo de confianza.

Tenemos una confianza del 90% de que el intervalo de 5.400 mm a 5.452 mm contiene el valor verdadero del diámetro promedio de agujeros para bujes en las cajas μ.

Interpretación probabilística del intervalo de confianza.

Si seleccionáramos diferentes muestras aleatorias y construyéramos los correspondientes intervalos de confianza, el 90% contendría el valor verdadero del diámetro promedio de agujeros para bujes en las cajas μ.