Example 8.1 from Holmes – Illowsky – Dean. Page 338.

Supongamos que estamos interesados en las puntuaciones medias de un examen. Se toma una muestra aleatoria de 36 puntuaciones y se obtiene una media muestral (puntuación media muestral) de 68 ($\overline{X} = 68$). En este ejemplo tenemos el conocimiento inusual de que la desviación estándar de la población es de 3 puntos. No cuente con conocer los parámetros de la población fuera de los ejemplos de los libros de texto. Encuentre una estimación del intervalo de confianza para la puntuación media de los exámenes de la población (la puntuación media de todos los exámenes). Encuentre un intervalo de confianza del 90% para la media real (poblacional) de las puntuaciones de los exámenes de estadística.

Suppose we are interested in the mean scores on an exam. A random sample of 36 scores is taken and gives a sample mean (sample mean score) of 68 ($\overline{X} = 68$). In this example we have the unusual knowledge that the population standard deviation is 3 points. Do not count on knowing the population parameters outside of textbook examples. Find a confidence interval estimate for the population mean exam score (the mean score on all exams). Find a 90% confidence interval for the true (population) mean of statistics exam scores.

Solución.

Variable: Puntuación de un examen

Tamaño de la muestra: $n = 36$

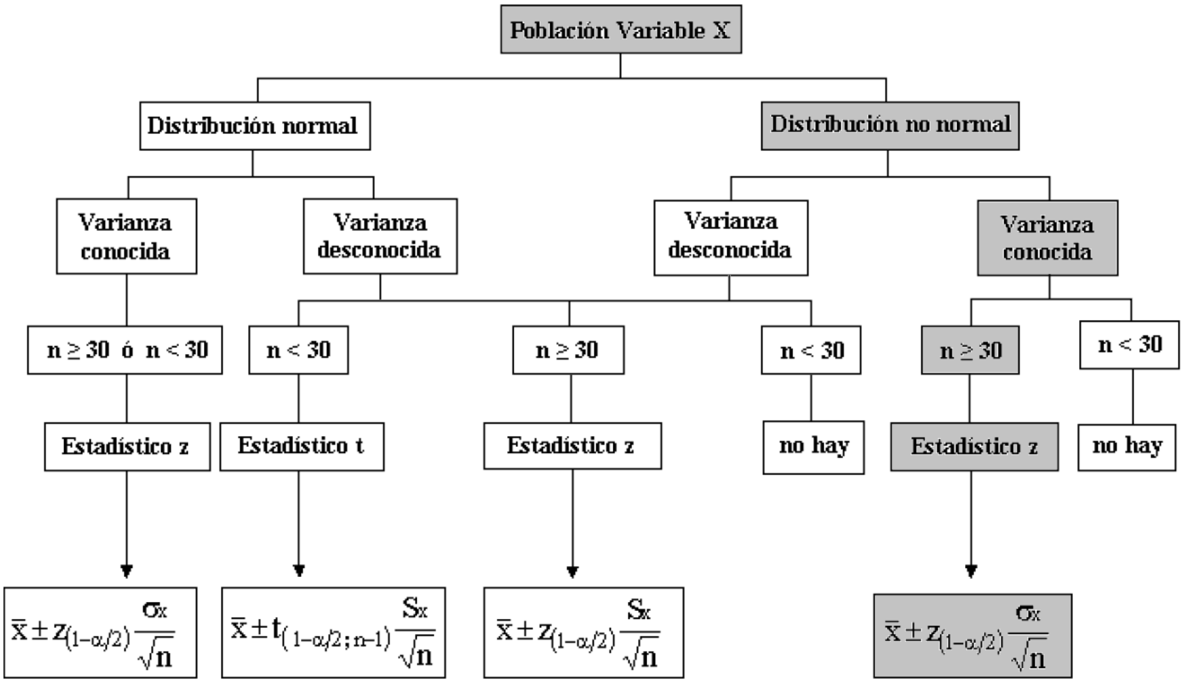
Media muestral: $\overline{X} = 68$

Desviación estándar poblacional: $\sigma = 3$

Nivel de confianza: $1 – \alpha = 0.90$

Intervalo de confianza para la media poblacional, σ^2 conocida.

Distribución a utilizar.



El intervalo de confianza para la media puede expresarse en cualquiera de las cuatro formas siguientes:

$$\mu\text{: } \bar{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}\text{, con } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ (Error estándar de la media)} \tag{1}$$

$$\mu\text{: } \bar{X} \pm E\text{, con } E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ (Margen de error)} \tag{2}$$

$$\mu\text{: } \bar{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{3}$$

$$X - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le X + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

Se ilustrará el cálculo con las cuatro formas presentadas, sin embargo, el uso de sólo una es suficiente para obtener la solución del problema.

Determinación de $z_{\alpha/2}$.

Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0.90$.

$1 - \alpha = 0.90$

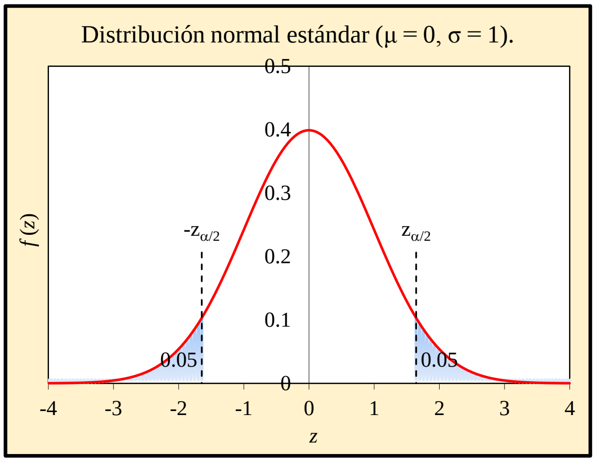
$\alpha = 1 - 0.90$

$\alpha = 0.10$

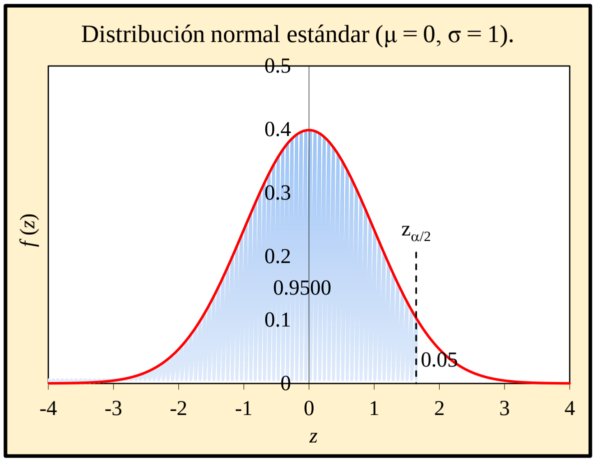
$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.10}{2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.05$$

$z_{\alpha/2} = z_{0.05}$ es el valor de z que tiene un área de 0.05 a la derecha.



El área acumulada a la izquierda es 1 – 0.05 = 0.9500.



Técnicamente, el valor de z se determina como $P(z \leq z_{\alpha/2}) = 0.9500$.

En palabras, z será el valor que corresponda a la probabilidad de 0.9500.

Para calcular este valor, se reproduce parte de la tabla de la normal estándar presentada en el apéndice del libro.

Se busca el valor de 0.9500 y se identifica el valor z que se relaciona con esta probabilidad.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	$\boxed{0.9505}$	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

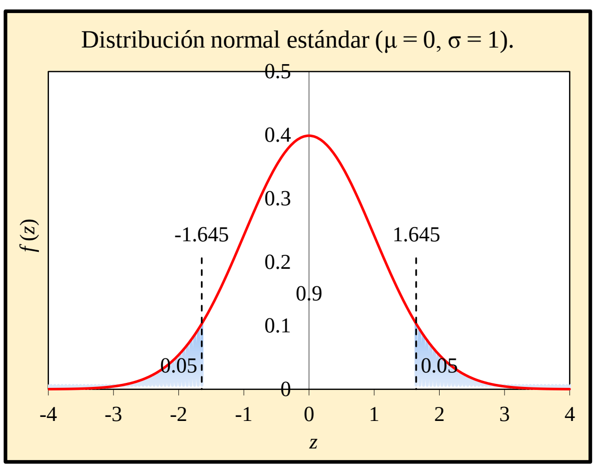
No encontramos 0.9500 exactamente. Los valores más cercanos son los que corresponden a 0.9495 (z = 1.64) y 0.9505 (z = 1.65). Se aplica interpolación lineal.

Probabilidad	z
0.9495	1.64
0.9500	z
0.9505	1.65

$$\frac{z-1.64}{1.65-1.64}=\frac{0.9500-0.9495}{0.9505-0.9495}$$

$$z=\left(\frac{0.9500-0.9495}{0.9505-0.9495}\right)(1.65-1.64)+1.64$$

$z_{\alpha/2}$ = 1.645



Determinación del intervalo de confianza.

Primer mecanismo de solución. Ecuación (1).

μ: $\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}$

Error estándar de la media.

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{3}{\sqrt{36}}$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{3}{6}$$

$$\sigma_{\overline{X}} = 0.5$$

Intervalo de confianza.

μ: 68 ± 1.645 × 0.5

μ: 68 ± 0.82

Límite inferior de confianza.

LIC = 68 – 0.82 = 67.18

Límite superior de confianza.

LSC = 68 + 0.82 = 68.82

Intervalo de confianza.

$67.18 \leq \mu \leq 68.82$

Segundo mecanismo de solución. Ecuación (2).

μ: $\overline{X} \pm E$

Margen de error.

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$E = 1.645 \times \frac{3}{\sqrt{36}}$$

$$E = 1.645 \times \frac{3}{6}$$

E = 1.645 × 0.5

E = 0.82

Intervalo de confianza.

μ: 68 ± 0.82

Límite inferior de confianza.

$LIC = 68 – 0.82 = 67.18$

Límite superior de confianza.

$LSC = 68 + 0.82 = 68.82$

Intervalo de confianza.

$67.18 \leq \mu \leq 68.82$

Tercer mecanismo de solución. Ecuación (3).

$$\mu:\ \bar{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mu:\ 68 \pm 1.645 \times \frac{3}{\sqrt{36}}$$

$$\mu:\ 68 \pm 1.645 \times \frac{3}{6}$$

μ: 68 ± 1.645 × 0.5

μ: 68 ± 0.82

Límite inferior de confianza.

$LIC = 68 – 0.82 = 67.18$

Límite superior de confianza.

$LSC = 68 + 0.82 = 68.82$

Intervalo de confianza.

$67.18 \leq \mu \leq 68.82$

Cuarto mecanismo de solución. Ecuación (4).

$$\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$68 - 1.645 \times \frac{3}{\sqrt{36}} \leq \mu \leq 68 + 1.645 \times \frac{3}{\sqrt{36}}$$

$$68 - 1.645 \times \frac{3}{6} \leq \mu \leq 68 + 1.645 \times \frac{3}{6}$$

$68 – 1.645 \times 0.5 \leq \mu \leq 68 + 1.645 \times 0.5$

$68 - 0.82 \leq \mu \leq 68 + 0.82$

$67.18 \leq \mu \leq 68.82$

Límite inferior de confianza.

$LIC = 67.18$

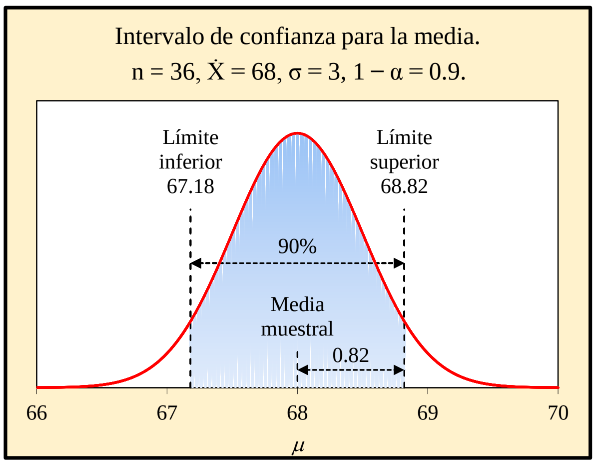
Límite superior de confianza.

$LSC = 68.82$

Intervalo de confianza.

$67.18 \leq \mu \leq 68.82$

Gráfico del intervalo de confianza.



Interpretación práctica del intervalo de confianza.

Tenemos una confianza del 90% de que el intervalo de 67.18 a 68.82 contiene el valor verdadero de la puntuación promedio de un examen μ.

Interpretación probabilística del intervalo de confianza.

Si seleccionáramos diferentes muestras aleatorias y construyéramos los correspondientes intervalos de confianza, el 90% contendría el valor verdadero de la puntuación promedio de un examen μ.