Ejemplo 8.7 del Lipschutz – Schiller. Página 296.

Una variable aleatoria poblacional X tiene una media desconocida μ y una desviación típica σ = 20. Una muestra aleatoria de tamaño 100 nos da una media muestral $\overline{X} = 250$. Hallar el intervalo de confianza del 90% correspondiente, para μ.

Solución.

Tamaño de la muestra: $n = 100$

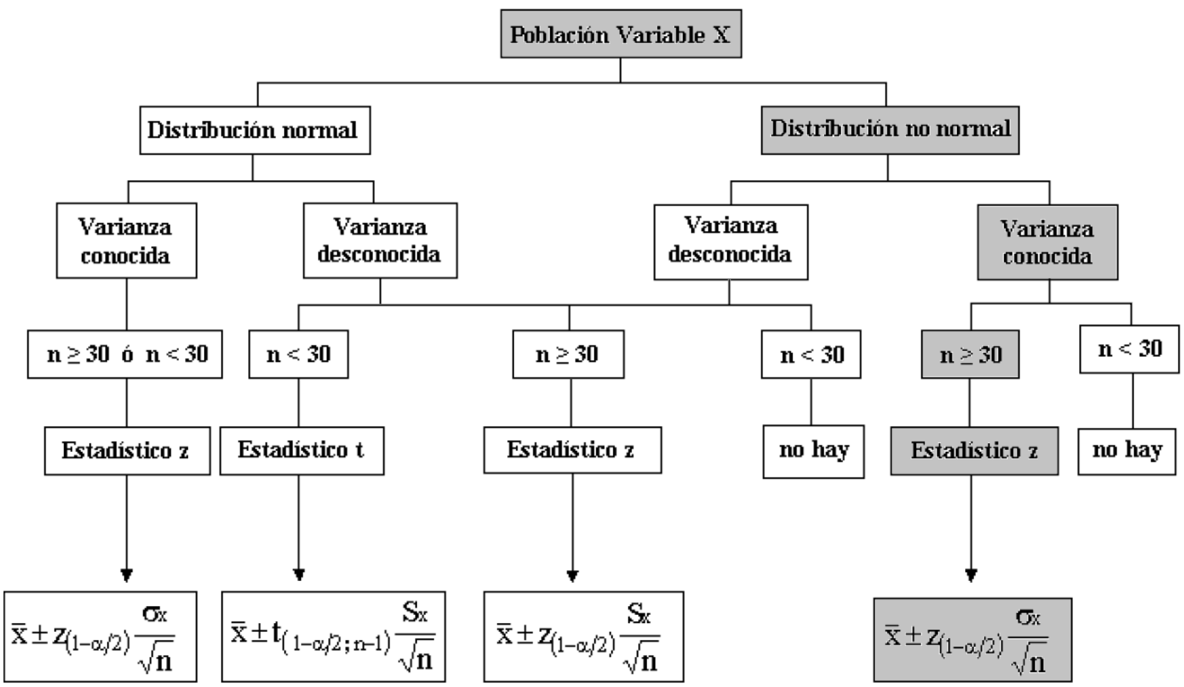
Media muestral: $\overline{X} = 250$

Desviación estándar poblacional: $\sigma = 20$

Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0.90$

Intervalo de confianza para la media poblacional, σ conocida.

Distribución a utilizar.



a) El intervalo de confianza para la media puede expresarse en cualquiera de las cuatro formas siguientes:

μ: $\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$, con $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (Error estándar de la media) (1)

$$\mu: \ \overline{X} \pm E \text{, con } E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ (Margen de error)} \quad (2)$$

$$\mu: \ \overline{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (3)$$

$$\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (4)$$

Se ilustrará el cálculo con las cuatro formas presentadas, sin embargo, el uso de sólo una es suficiente para obtener la solución del problema.

Determinación de $z_{\alpha/2}$.

Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0.90$.

$1 - \alpha = 0.90$

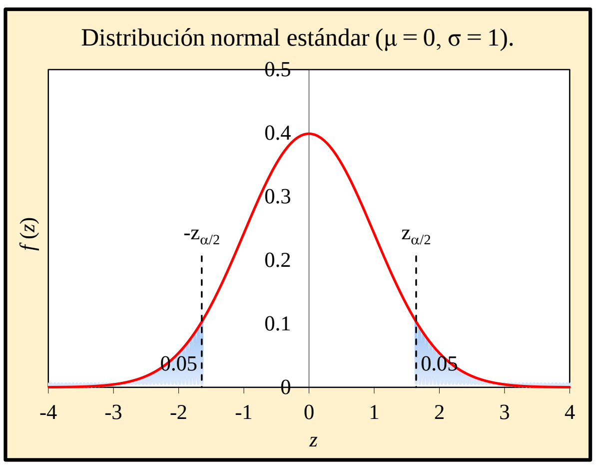
$\alpha = 1 - 0.90$

$\alpha = 0.10$

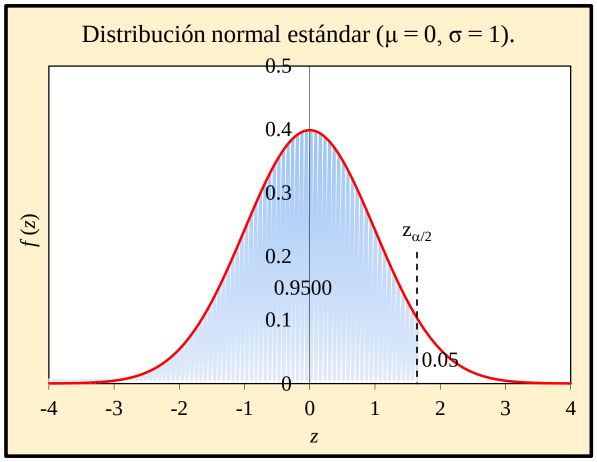
$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.10}{2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.05$$

$z_{\alpha/2} = z_{0.05}$ es el valor de z que tiene un área de 0.05 a la derecha.



El área acumulada a la izquierda es 1 – 0.05 = 0.9500.



Técnicamente, el valor de z se determina como $P(z \leq z_{\alpha/2}) = 0.9500$.

En palabras, z será el valor que corresponda a la probabilidad de 0.9500.

Para calcular este valor, se reproduce parte de la tabla de la normal estándar presentada en el apéndice del libro.

Se busca el valor de 0.9500 y se identifica el valor z que se relaciona con esta probabilidad.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	$\boxed{0.9505}$	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

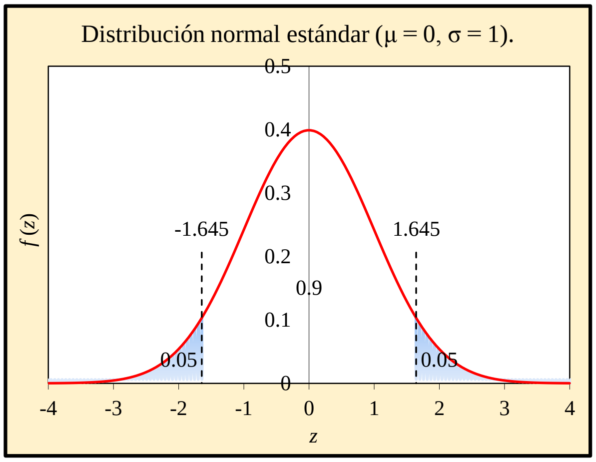
No encontramos 0.9500 exactamente. Los valores más cercanos son los que corresponden a 0.9495 (z = 1.64) y 0.9505 (z = 1.65). Se aplica interpolación lineal.

Probabilidad	z
0.9495	1.64
0.9500	z
0.9505	1.65

$$\frac{z-1.64}{1.65-1.64} = \frac{0.9500-0.9495}{0.9505-0.9495}$$

$$z = \left(\frac{0.9500-0.9495}{0.9505-0.9495}\right)(1.65-1.64)+1.64$$

$z_{\alpha/2} = 1.645$



Determinación del intervalo de confianza.

Primer mecanismo de solución. Ecuación (1).

μ: $\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}$

Error estándar de la media.

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{20}{\sqrt{100}}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{20}{10}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = 2$$

Intervalo de confianza.

μ: 250 ± 1.645 × 2

μ: 250 ± 3.3

Límite inferior de confianza.

LIC = 250 – 3.3 = 246.7

Límite superior de confianza.

LSC = 250 + 3.3 = 253.3

Intervalo de confianza.

$246.7 \leq \mu \leq 253.3$

Segundo mecanismo de solución. Ecuación (2).

μ: $\bar{X} \pm E$

Margen de error.

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$E = 1.645 \times \frac{20}{\sqrt{100}}$$

$$E = 1.645 \times \frac{20}{10}$$

E = 1.645 × 2

E = 3.3

Intervalo de confianza.

μ: 250 ± 3.3

Límite inferior de confianza.

LIC = 250 – 3.3 = 246.7

Límite superior de confianza.

LSC = 250 + 3.3 = 253.3

Intervalo de confianza.

$246.7 \leq \mu \leq 253.3$

Tercero mecanismo de solución. Ecuación (3).

$$\mu: \; \bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mu: \; 250 \pm 1.645 \times \frac{20}{\sqrt{100}}$$

$$\mu: \; 250 \pm 1.645 \times \frac{20}{10}$$

μ: 250 ± 1.645 × 2

μ: 250 ± 3.3

Límite inferior de confianza.

$LIC = 250 - 3.3 = 246.7$

Límite superior de confianza.

$LSC = 250 + 3.3 = 253.3$

Intervalo de confianza.

$246.7 \le \mu \le 253.3$

Cuarto mecanismo de solución. Ecuación (4).

$$X - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le X + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$250 - 1.645 \times \frac{20}{\sqrt{100}} \le \mu \le 250 + 1.645 \times \frac{20}{\sqrt{100}}$$

$$250 - 1.645 \times \frac{20}{10} \le \mu \le 250 + 1.645 \times \frac{20}{10}$$

$250 - 1.645 \times 2 \le \mu \le 250 + 1.645 \times 2$

$250 - 3.3 \le \mu \le 250 + 3.3$

$246.7 \le \mu \le 253.3$

Límite inferior de confianza.

$LIC = 246.7$

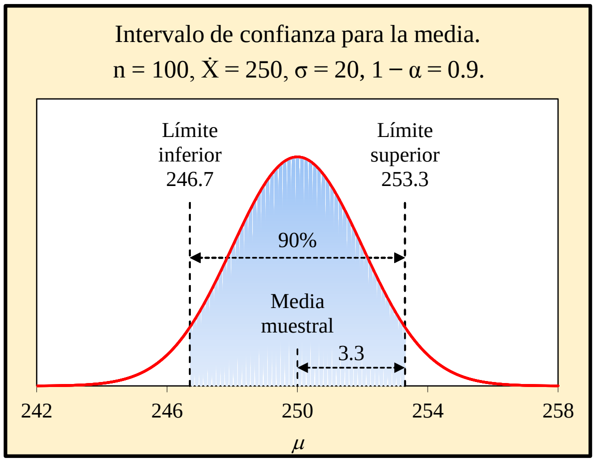
Límite superior de confianza.

$LSC = 253.3$

Intervalo de confianza.

$246.7 \le \mu \le 253.3$

Gráfico del intervalo de confianza.



Interpretación práctica del intervalo de confianza.

Tenemos una confianza del 90% de que el intervalo de 246.7 a 253.3 realmente contiene el valor verdadero de la media poblacional μ.

Interpretación probabilística del intervalo de confianza.

Si seleccionáramos diferentes muestras aleatorias y construyéramos los correspondientes intervalos de confianza, el 90% contendría el valor verdadero de la media poblacional μ.